INTENZITÁSALAPÚ MODELLEZÉS ÉS A MÉRTÉKCSERE[1]

MEDVEGYEV PÉTER – PLANK PÉTER
Budapesti Corvinus Egyetem – Morgan Stanley

A dolgozatban a hitelderivatívák intenzitásalapú modellezésének néhány kérdését vizsgáljuk meg. Megmutatjuk, hogy alkalmas mértékcserével nemcsak a duplán sztochasztikus folyamatok, hanem tetszőleges intenzitással rendelkező pontfolyamat esetén is kiszámolható az összetett kár- és csődfolyamat eloszlásának Laplace-transzformáltja.

Bevezetés

A hitelderivativák valószínűségszámítási eszközökkel történő matematikai leírására két alapvetően eltérő modellezési filozófia áll rendelkezésünkre. A strukturális modellek a csődöket közvetetten, pl. a vállalati kötvényekre vonatkozó CDS-ekből álló portfólió esetében a vállalatok értékének alakulásából próbálják visszakövetkeztetni, ám ekkor jelentős számú, s legtöbbször megkérdőjelezhető feltételezéssel kell élnünk. Ezzel szemben a redukált formájú modellek esetében közvetlenül a csődidők és a csődök során realizálódó károk modellezése a célunk, mely ekvivalens a csődök egy adott időpontbeli számát megadó számláló folyamat, illetve a veszteség nagyságát is figyelembe vevő összetett folyamat tanulmányozásával. Ilyenkor a kár vagy csődesemények okáról, egymásutánjáról lényegében semmilyen közgazdasági, strukturális feltétellel nem élünk. Mindössze azt követeljük meg, hogy az egyes káresemények bekövetkezésekor az esemény bekövetkezéséről tudomásunk legyen. Matematikai terminológiában ez azt jelenti, hogy az egyes káresemények bekövetkezési időpontjai úgynevezett megállási időket alkotnak.

Vegyük észre, hogy a helyzet nagyon hasonló ahhoz, amivel az operációs kockázat meghatározásakor szembesülünk. E terület alapmodellje szerint a hibák bekövetkezését Poisson-folyamattal, míg a kár nagyságát lognormális eloszlású valószínűségi változóval szokás modellezni, melyek együtt egy összetett Poisson-folyamatot határoznak meg. A hitelderivatívák esetéhez hasonlóan végső soron itt is az egyes időpontokban fennálló kumulatív kárnagyság (tehát az összetett Poisson-folyamat adott időpontbeli értékének) eloszlását szeretnénk megadni. A feladat megoldása azonban már ezen az egyszerű szinten is komoly kihívást jelent, hiszen a keresett eloszlást közvetlenül nem tudjuk kiszámolni. A közismert technika a Laplace-transzformált invertálására épül. Nem meglepő tehát, hogy a hitelderivatívák redukált formájú modellezése során is e transzformált meghatározása a célunk.

[1]Beérkezett: 2011. december 9. E-mail: medvegyev@uni-corvinus.hu.

Fontos különbség azonban az operációs kockázat modellezése és a pénzügyi matematika között, hogy az utóbbi esetén az a valószínűségszámításban alapvető szerepet játszó feltétel, miszerint a valószínűségi mérték ismert és előre rögzített nem használható. A pénzügyi matematika legfőbb matematikai trükkje az, hogy a piaci szereplők preferenciáit a kockázatmentes mértékbe olvasztja be. Ennek nagyon egyszerű oka van: a pénzügyi döntésekre általában a nagy számok törvénye nem használható. Bár fájóan sokan úgy képzelik, a pénzügyek nem szerencsejáték, ahol a tömegjelenségek viselkedési szabályai érvényesek, hanem kockázatkezelés, ahol a veszteségtől való félelem, a kockázat minimalizálása a cél. Eleve kérdéses, hogy az egyes pénzügyi szituációk tekinthetők-e ismétlődő eseményeknek, de ha annak is tekinthetők, az egyes kimenetektől való félelem automatikusan torzítja a kimenetek árát. Hiába lesz egy ismétlődő helyzetben két kimenet valószínűsége azonos, ha az egyiktől jobban félünk, mint a másiktól, akkor az árakban nem elsősorban a kimenetelek valószínűsége, hanem a félelmek relatív foka fog tükröződni. A pénzügyekben ugyanúgy, ahogyan a közgazdaságtan minden más területén az árakat lényegében a kereslet és a kínálat határozza meg, amelyek pedig alapvetően a piaci szereplők motívumaitól, vagyis azok hasznossági függvényeitől függenek. Az alapvető módszertani probléma az, hogy mivel a piaci szereplők gondolatait nem ismerjük, feltesszük, hogy az általuk bevitt torzítást az árakból tudjuk visszakövetkeztetni. Feltesszük tehát, hogy adott egy $\mathbf{Q}$ mérték, amely kódolt formában tartalmazza mind a valószínűségeket, mind a hasznossági függvények által a piaci mechanizmusokon keresztül gyakorolt torzító hatásokat. Az így kapott mértékről egyetlen dolgot tehetünk fel, nevezetesen, hogy a mérték ekvivalens az eredeti esetlegesen létező valószínűségi mértékkel. Ez alatt azt értjük, hogy a nulla valószínűségű események a két mérték alatt megegyeznek. Vagyis a két mérték alatt a lehetetlennek, következésképpen a biztosnak tekintett események azonosak. Feltesszük továbbá, hogy ezen mérték szerinti diszkontált várható értékként számoljuk ki az aktuális árakat. Ezt a modellfeltételt két dologra tudjuk felhasználni: egyrészt az ismert árakból következtetni tudunk az ismeretlen $\mathbf{Q}$ mértékre (ezt hívjuk kalibrálásnak), másrészt a kalibrált $\mathbf{Q}$ segítségével következtetni tudunk az esetleges ismeretlen árakra. Az árakat több okból nem ismerjük: vagy azért, mert még a termék nincs is a piacon és az esetleges alkalmas piaci árat akarjuk kitalálni, vagy, igen gyakran azért, mert a termék piaca nem elég likvid ahhoz, hogy az utoljára megfigyelt árak mögötti tényleges kereslet-kínálati viszonyokat mérvadónak tekintsük. A kalibráció, vagyis a $\mathbf{Q}$ mérték kiszámolásának további előnye, hogy a $\mathbf{Q}$ mérték információt nyújt a piaci szereplők kockázati preferenciájáról is, vagyis az egyes kockázati forrásoktól való félelem relatív szintjére. Például a CDS-ek esetén a CDS-ek árából következtetni lehet a csőd $\mathbf{Q}$ mérték alatti valószínűségére, amely nemcsak az esemény bekövetkezésének valószínűségét tükrözi, hanem a csőd következményeitől való félelem fokára is rávilágít.

Ezzel a megközelítéssel van azonban egy alapvető matematikai probléma: a különböző sztochasztikus tulajdonságok egy jelentős része nem invariáns az ekvivalens mértékcserére nézve. Mivel a valószínűségszámítási intuíció általában a ,,valódi" valószínűségre épül, kérdéses, hogy a kicserélt mérték esetén milyen sztochasztikus tulajdonságok maradnak érvényben. A pénzügyi modellezés során gyakran keveredik e tulajdonságok valós és a kockázatmentes mérték alatti vizsgálata, s a kettő közötti eltérés a modellkockázat legfőbb forrása. Miként megjegyeztük, az egyedüli alkalmazható megkötés, hogy a nulla valószínűségű események halmaza nem változik. Ennek igen egyszerű közgazdasági oka van: azoknak és csakis azoknak a véletlen kifizetéseknek lesz értelmes módon pozitív az ára, amikor pozitív valószínűséggel kapunk is valamit. Következésképp feltehetjük, hogy a mértékcsere ekvivalens. Ha nem is túl sok tulajdonság, de azért néhány nem változik az ekvivalens mértékcsere során. Ilyen az ekvivalencia osztályok fogalma, az arbitrázs fogalma, a szemimartingálok osztálya, illetve a kvadratikus variáció, továbbá a trajektóriák topológiai tulajdonságai (mint amilyen pl. a folytonosság vagy a differenciálhatóság).

Az alábbi tárgyalás kiindulópontja, hogy a számláló folyamatok egy bizonyos családja, nevezetesen az intenzitással rendelkező számláló folyamatok osztálya is invariáns az ekvivalens mértékcserére nézve, azaz a valós és kockázatmentes mérték közötti eltérés az intenzitás változásán keresztül modellezhető. Ez a tétel talán nem annyira ismert, mint az említett többi invariancia tulajdonság, így a bizonyítását a következőkben ismertetni fogjuk.

Az intenzitással rendelkező számláló folyamatok osztályának egyik igen hasznos részcsaládját alkotják az úgynevezett duplán sztochasztikus folyamatok. Ezek esetében ugyanis a Poisson-folyamatokra érvényes számos elegáns számolási szabály közvetlenül átvihető. Így például meghatározható az összetett folyamat eloszlása, vagyis amikor a véletlenszerűen bekövetkező károk modellezésekor nemcsak a károk számát, hanem azok nagyságát is figyelembe akarjuk venni. Az eljárás kiindulópontjául az az észrevétel szolgál, hogy az összetett eloszlás Laplace-transzformáltja az intenzitás alapján felírható. Felírunk egy modellt az intenzitás alakulására, ez alapján kiszámoljuk az összetett eloszlás Laplace-transzformáltját, majd a transzformált invertálásával meghatározzuk az összetett eloszlást. Ezen elv központi szerepet játszik az intenzitásalapú modellezés során, s rámutat miért is jelentenek e folyamatok hatékony vizsgálódási eszközt.

A duplán sztochasztikus folyamatok családja azonban túlságosan szűk: egyrészt e folyamatok nem invariánsak az ekvivalens mértékcserére nézve (ld. [7]), másrészt nem képesek reprodukálni a csődök klasztereződésének jelenségét, azaz a korábban bekövetkezett csődök száma nem növelheti a későbbi csődök bekövetkezésének esélyét. Általános esetben azonban az intenzitással rendelkező számláló folyamatok Laplace-transzformáltjának meghatározása közvetlenül nem egyszerű feladat. A megoldást az [5] dolgozat egy igen szép gondolata tartalmazza: egy további mértékcserével a Laplace-transzformált nem duplán sztochasztikus folyamat esetén is kiszámolható az intenzitás alapján. Az említett publikáció egy korábbi verziója azonban hibás volt, az aktuális változata viszont túl körülményes és igen nehezen követhető, így vélhetően akadályozza a technika széles körű elterjedését. Mivel véleményünk szerint egy igen fontos matematikai eszközről van szó, így az alábbiakban részletesen bemutatunk egy olyan, tőlünk származó egyszerű gondolatmenetet, amivel az [5] dolgozat eredményei könnyen – legalábbis a sztochasztikus analízisben járatos olvasó számára könnyen – megérthetőek. Az általunk bemutatott megközelítés segítséget adhat a konkrét alkalmazások hatékony kidolgozása során, ugyanakkor a módszer alapgondolatának megértéséhez nem szükséges, hogy az olvasó a sztochasztikus analízis sajátos nyelvezetének minden részletével tisztában legyen. Az egyes lépések matematikai tárgyalása mellett megpróbálunk a sztochasztikus analízisből átvett tételek egyszerű közgazdasági interpretációjára is rávilágítani.

1 A közgazdasági háttér rövid bemutatása

A dolgozatban tárgyalt matematikai probléma közgazdasági hátterének bemutatásához érdemes a jelzáloghitelekre épülő származtatott termékek árazásának kérdéséből kiindulni. A probléma fontossága nemcsak abból fakad, hogy történetileg éppen ezen derivatívák piacának összeomlása vezetett a jelenlegi pénzügyi válsághoz, hanem azért is, mert az alaptermék jelentősége a válságot követően is fennmarad, hiszen a jelzáloghitelek teszik ki a lakossági hitelállomány túlnyomó többségét. Vagyis a válság kapcsán felmerült problémák nem tüntették el ezt az alapterméket és az avval kapcsolatos kockázatokat, így a jelzáloghitelek viselkedésének megértése továbbra is a pénzügyi elmélet egyik fontos feladata marad.

De miből is fakad a jelzáloghitelek kockázatossága? Ennek több oka van: egyrészt a hitelt felvevő személy becsődölhet, így nem tudja fizetni a további részleteket. A csőd lehetőségén kívüli további probléma a törlesztőrészlet bizonytalansága, melynek nagysága lényegében a piaci szereplőktől független külső – nagyrészt makroökonómiai – tényezők alakulásától függ. Normál piaci-pénzügyi körülmények között a törlesztőrészlet az aktuális kamatláb függvénye, ám további (közvetett) hatásként megemlítendő, hogy magas kamatláb esetén általában alacsony a foglalkoztatás, tehát kisebb a kölcsönt felvevő jövedelme, így nő a csőd valószínűsége. Magyarországon a törlesztőrészletek gyakran idegen devizában vannak meghatározva, következésképpen a kamatlábak ingadozásán kívül még a devizaárfolyamok alakulása is egy bizonytalansági forrásul szolgál. Ezzel ellentétes folyamat az újrafinanszírozás lehetősége, melyre számos országban adódik lehetőség: amikor a gazdasági környezet javul és így a kamatlábak csökkennek az adósok egy esetlegesen kedvezőbb hitellel kiválthatják a korábbi hiteleiket, ám ez a hitelező szempontjából szintén veszteséget jelent. Következésképpen a jelzáloghitelekből származó pénzáram lényegében áttekinthetetlen módon függ a makroökonómiai feltételektől. Ezen bizonytalanságok együttese olyan nagy, hogy egyetlen piaci szereplő sem szívesen vállalja át őket, a kölcsönt nyújtó helyi bankok és pénzügyi intézmények tehát megpróbálnak ezektől a kockázatoktól megszabadulni. A dolog némiképpen emlékeztet a viszontbiztosítás problémájához. A helyi „kis” biztosítók az egyedi biztosítási kötvényeket egy „nagyobb” kosárba helyezik és abban bíznak, hogy az egyedi kockázatok ingadozása –

a nagy számok törvénye alapján – kiegyenlítődik és így a kockázatos pénzáramokat biztos pénzárammá lehet konvertálni. A jelzáloghitelek esetén az analóg trükk a jelzálogalapú kötvények kibocsátása: egy sor egyedi jelzálogkötvényből egy új „szuperkötvényt” hozunk létre, e ezen új kötvény birtokosának átadjuk a „szuperkötvény” alapjául szolgáló egyedi jelzálogokból származó bizonytalan pénzáramokat, természetesen egy fix vagy előre meghatározott rendben felmerülő díj ellenében. A kérdés már csak annyi, hogy mennyi ez a díj?

A probléma megoldására két út kínálkozik. Az egyik lehetőség az, hogy szakítunk a valószínűségszámítási nyelvezettel és a pénzügyi folyamatokat a hagyományos közgazdaságtani eszközökkel próbáljuk modellezni. Ilyenkor azonban szembekerülünk avval, hogy a mikroökonómiai szemléletű közgazdasági modellek jelentős része nagyon nehezen operacionalizálható, ugyanis az elméletben alapvető szerepet játszó hasznossági függvények nehezen figyelhetők meg. Gyakran elhangzik, hogy a pénzügyi elemzésben játékelméleti eszközöket kellene használni. Elvileg igen, de a pénzügyi gyakorlat mindennapjaiban e modellek használhatóságát még nem sikerült igazolni, főleg azért nem, mert a játékelmélet alapjául szolgáló fogalmak nem közvetlenül megfigyelhetők, fixen adatbázisokban nem írhatók le. Egy másik lehetőség a makrotényezők beépítése a modellekbe, de ilyenkor meg avval kell számolni, hogy a modellek adattartalma és időhorizontja egyszerűen alkalmatlan a piaci gyakorlat által támasztott pontosság kielégítésére. További – jobb alternatíva híján felmerülő – lehetőség, hogy megőrizzük a sztochasztikus nyelvezetet, annak ellenére, hogy pontosan látjuk az ebből eredő problémákat, de óvatosan és rendkívül körültekintően járunk el: csak olyan valószínűségi modelleket engedünk meg, amelyek invariánsak az ekvivalens mértékcserére.

Összetett veszteségfolyamatok közgazdasági problémái

Miként az előző pontban említettük, a különböző pénzügyi elemzések egyik alapvető kérdése, hogy miként modellezhetjük egy adott időszak alatt bekövetkező károsemények együttesének eloszlását, mely nyilvánvaló módon két komponenstől függ: milyen gyakran és mekkora kár következett be. A klasszikus biztosításmatematikában feltehetjük, hogy a két folyamat egymástól független, így e megközelítési mód során ezek egymástól különállóan modellezhetőek. E feltétel jelentős egyszerűsítést jelent a modell becslése szempontjából, hiszen hosszabb időszak alatt nagy számú adat figyelhető meg mind az egyes események között eltelt időszakokról, mind a bekövetkező károk nagyságáról. A valószínűségszámításban azonban általánosan nem a peremeloszlások modellezése, hanem az együttes eloszlások megadása jelenti a problémát. A feltételezett függetlenség miatt természetesen az együttes eloszlás teljességgel leírható a peremeloszlások segítségével, ám mint arra a bevezetőben is kitértünk, a jelzáloghitelek esetében a függetlenség feltételezése nem elfogadható, hiszen a pénzügyi csődesemények esetén az egyik alapvető észrevétel a folyamatok önerősítő volta. A bekövetkező csődök számának növekedése tovább növeli a csődök intenzitását, illetve nagyságát.

További problémát jelent, hogy a káresemények összetett eloszlásának modellezését két különböző célra lehet felhasználni: a tőketartalék meghatározására, illetve a csődeseményekhez kötött származtatott termékek előző pontban felvetett árazására. Az első esetben arra vagyunk kíváncsiak, hogy egy adott valószínűség mellett mekkora veszteséget szenvedhetünk el, ilyenkor tehát a számítások során a valós veszteségadatokra támaszkodunk. A pénzügyi matematika említett alapmódszertana szerint azonban a származtatott termékek árazásakor hasonló, de semmiképpen sem azonos módon kell eljárni. Ekkor a modellben szereplő veszteségfolyamat viselkedésére nem a tényleges, hanem egy mesterséges – a kockázatokat és a piaci szereplők vélekedését egyaránt tükröző – valószínűségi mérték alatt, a piacon megfigyelhető árakból kiindulva próbálunk következtetni. Vagyis úgy kell meghatározni (kalibrálni) a folyamatot leíró paramétereket, hogy a kalibrált paraméterekkel az adott modellkereten belül a lehető legjobban tudjuk közelíteni a származtatott termékek aktuális, piacon megfigyelt árait.

Valamely jövőbeli kifizetés jelenbeli ára két tényezőtől függ: egyrészt a kifizetés időpontjától, másrészt annak bizonytalanságától. Az idővel kapcsolatos problémákat a diszkontálással oldjuk meg, az ehhez szükséges diszkonttényező pedig a piacon megfigyelhető kamatokra támaszkodva meghatározható. A diszkonttényező, illetve a kamatok azonban csak a biztos kifizetések időben való átcsoportosításáért járó kompenzáció mértékét írják le. Nem véletlenül használjuk a bizonytalanság kifejezést, ugyanis a hagyományos valószínűségszámítási értelemben nem feltétlenül tudjuk az egyes kimenetelek eloszlását. Általában nem tömegeseményekről van szó, hanem egyedi történésekről. A bizonytalanság modellezése úgy történik, hogy az egyes lehetséges kimenetelek mindegyikéhez egy-egy súlyt rendelünk. Ezeket a súlyokat szokás szubjektív valószínűségnek nevezni, a súlyok relatív nagysága pedig a veszteségektől való félelem mértékét tükrözik.

A minden pénzügyi tankönyvben megjelenő példa szerint a lottó játék várható nyeresége negatív, de a kockázati preferenciák miatt a lottó játék ára mégis pozitív. Ennek oka, hogy a kis valószínűségű nagy nyereség lehetőségét többre értékeljük, mint a nagy valószínűségű kis veszteséget. A preferenciák által indukált torzítás arányára az árból és az eladott szelvények számából következtethetünk. Ezek a félelmek azonban közvetlenül nem figyelhetők meg, csak a piaci árakon keresztül következtethetünk rájuk, vagyis az aktuális, a diszkontáláshoz használt kamatokat megadó hozamgörbe és a bizonytalan kifizetéssel rendelkező termékek árából visszaszámoljuk a félelmeket megadó súlyokat. A modellt tehát az árakhoz és nem a tényleges gyakorisági táblákhoz kalibráljuk. A modell további használatakor implicite feltételezzük, hogy a kalibráció során kapott súlyok – legalábbis egy rövid időhorizonton – stabilak és függetlenek a közvetlenül megfigyelt helyzettől, következésképpen az ismeretlen árú kifizetések esetén is alkalmazhatóak. Vegyük észre, hogy a kalibráció széleskörű használatára épül a vállalati pénzügyek azon számtalanszor használt szabálya is, miszerint valamely beruházás jövőbeli pénzáramát egy vele azonos bizonytalanságú pénzáram ismert diszkonttényezőjével kell diszkontálni.

Az így kapott módszertan nyilvánvaló előnye, hogy nagymértékben támaszkodhat a sztochasztikus folyamatok és a valószínűségszámítás kiterjedt irodalmára. Szintén fontos tulajdonság, hogy a kockázatkezelési gyakorlatban használt eszköztár (legalábbis részben) azonos matematikai alapokra épül, mint a kalibráció módszertana, így az alkalmazás során egyfajta kereszthatás léphet fel. Ám a megközelítés előnye egyúttal a hátrányává is válik: alapvetően a valószínűségszámítási intuícióra épül, ám miként jeleztük, mindössze felületes formai azonosságról van szó. A valószínűségről mindenkinek van egy többé-kevésbé megbízható intuíciója, ami viszont nem mondható el a bizonytalan körülmények közötti áralakulásról, illetve az egyensúlyi piaci folyamatokról.

Miként már jeleztük, matematikailag az egyik alapvető kérdés a következő: ekvivalens mértékcsere esetén miként változnak a különböző sztochasztikus tulajdonságok? Melyek azok a modellfeltételek, módszerek, amelyek invariánsak az ekvivalens mértékcserére? Tekintsük például a sztochasztikus folyamatok irodalmának egyik leggyakrabban használt modelljét, a Markov-láncokat. Ha megváltoztatjuk az alapul vett mértéket, nyilvánvalóan megváltozhatnak az átmenetvalószínűségek, de sajnos maga a Markov-tulajdonság is eltűnhet. Gondoljunk csak arra, hogy a következő csőd bekövetkezésének időpontja adott esetben független lehet a korábban bekövetkezett csődidőpontoktól, de a következő csőd elleni biztosítás ára függ a még rendelkezésre álló tartalékoktól, így azok folyamatos kimerülése esetén az újabb csőd elleni biztosítás ára nő, vagyis a folyamat nem Markov-jellegű, ugyanis az ár függ a korábban megtett úttól, nem csak a jelen helyzettől. Ez még akkor is igaz, ha a csődfolyamat ténylegesen Markov-lánc volt. Felvetheti valaki, hogy a tartalékokat is beépítve a modellbe a Markov-tulajdonság megőrizhető, de ez félrevezető, ugyanis a kitörő pánik egyszerűen a múltbeli események lefolyásától függ, amelynek csak egyik eleme a tartalék nagysága. Következésképpen az aktuális ár nemcsak a jelen helyzettől függ, hanem igen nagy mértékben a jelen helyzethez vezető úttól is. Hangsúlyozzuk, hogy ez akkor is igaz, ha az alapul vett tényleges folyamat statisztikailag kimutathatólag Markov-folyamat volt. De egy Markov-folyamat alakulásától való félelem miért is lenne Markov-folyamat?

Független és azonos eloszlású valószínűségi változók adott sorozata esetén a mértékcsere során nemcsak az eloszlás, illetve a hozzá kapcsolódó paraméterek (mint amelyiken a várható érték és szórás) változhatnak meg, hanem a függetlenség is eltűnhet, sőt a valószínűségi változók azonos eloszlására tett megkötés sem marad feltétlenül érvényben. És ezen semmit sem segít az, hogy a mértékcsere ekvivalens. A sztochasztikus modellezés másik kedvence a Poisson-folyamat, ahol az egyes események közötti várakozási időt független és azonos exponenciális eloszlású valószínűségi változók adják. Mivel ekvivalens mértékcserére ezen tulajdonságok egyike sem invariáns, milyen tulajdonságú marad a folyamat a mértékcsere után? Az árazás szempontjából milyen eloszlást fognak követni az egyes események között eltelt időpontok? Például ahogyan nő a csődesemények száma, úgy nő a következő csődtől való félelem, amely a csőd elleni biztosítás árának növekedésében jelenik meg.

A hagyományos biztosításmatematikai szemléletben az ár a várható veszteségektől függ, így az árazás szempontjából úgy tűnik, mintha a folyamat intenzitása nőne, valójában pedig esetleg csökkenhet is, ugyanis adott számú csőd esetén – éppen a rendelkezésre álló erőforrások végessége miatt – a pánik akkor is kitörhet, ha a további veszteségek időbeli gyakorisága már elkezdett csökkeni. Még ha fel is tesszük, hogy a csődök száma továbbra is Poisson-folyamatot követ, hogyan határozzuk meg a folyamat intenzitását megadó λ paraméter alakulását, ha a ténylegesen megfigyelt folyamat paramétere nem használható? Ismételten hangsúlyozzuk, hogy a statisztikailag megfigyelt csődintenzitás a várható veszteségek eloszlásának kiszámolására használható, de a veszteségért fizetendő ,,biztosítás árának" meghatározására nem, ugyanis ez az ár nem valószínűségi kérdés, hanem a kereslet és kínálat eredője, vagyis végeredményben a kockázati preferenciák függvénye.

2 Intenzitással rendelkező pontfolyamatok

A hitelderivatívák, illetve általában az összetett veszteségfolyamatok matematikai modellezésének legegyszerűbb, de mégis talán a leghatékonyabb technikáját az intenzitással rendelkező pontfolyamatok adják. E modellek legalapvetőbbike a Poisson-folyamat, a pontfolyamatokat pedig mint a Poisson-folyamat általánosításait kell elképzelnünk. A pontfolyamatok megadásához elegendő ismernünk az egyes események bekövetkezésének időpontját leíró (τ_n) megállási időkből álló sorozatot[2]. Értelemszerűen feltesszük, hogy $\tau_0 = 0$ és minden n-re $\tau_n < \tau_{n+1}$. A (τ_n) sorozat felírásával ekvivalens, ha ismerjük az $N(t) \overset{\circ}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \chi(\tau_k \leq t)$ számláló folyamatot. Miként a nevéből is kiderül, az $N(t)$ a t időpontig bekövetkezett események számát adja meg. Az N számláló folyamat modellezése közvetlenül nehéz feladat, ezért további megkötéseket szokás tenni. A címben szereplő intenzitás szó arra utal, hogy valamiképpen mérhető, hogy az ugrások milyen ,,intenzitással" következnek be. A pontos matematikai definíció a következő:

1. Definíció. *Legyen N egy tetszőleges számláló folyamat, $\lambda_s \geq 0$ pedig egy progresszíven mérhető folyamat*[3]*. Azt mondjuk, hogy a λ az N folyamat intenzitása, ha az*

$$M(t) \overset{\circ}{=} N(t) - \int_0^t \lambda_s \, ds$$

[2]Emlékeztetünk, hogy megállási időn olyan véletlen időpontot értünk, amely mögötti esemény bekövetkezésekor tudjuk, hogy az esemény bekövetkezett. Vagyis például egy adott időszakban az ár minimumának időpontja nem megállási idő, ugyanis csak később derül ki, hogy mikor volt az ár minimális. Vagyis feltesszük, hogy a csőd időpontjában tudjuk, hogy a csőd bekövetkezett. Ez praktikusan azt jelenti, hogy a csődöt az első nemfizetéssel azonosítjuk.

[3]Ha az olvasó nem járatos a sztochasztikus analízis nyelvezetében, a progresszíven mérhető jelzőt figyelmen kívül hagyhatja. Elegendő, ha olyan folyamatra gondol, amely folytonos komponensek mellett ugrásokat is tartalmazhat, vagyis egy igen bő, szakadásokat is megengedő családról van szó.

úgynevezett kompenzált folyamat lokális martingál[4].

A Poisson-folyamat esetén a $\lambda_s \equiv \lambda$ konstans, az integrál pedig éppen a Poisson-folyamat várható értékét megadó λt alakra egyszerűsödik. Ilyenkor az M folyamatot szokás kompenzált Poisson-folyamatnak is nevezni. Mivel a Poisson-folyamat esetén az M független növekményű és nulla várható értékű, így ekkor az M nemcsak lokális martingál lesz, hanem valódi martingál is. Számos technikai probléma elkerülése céljából a sztochasztikus analízisben megszokott módon azonban célszerű megengednünk a definícióban, hogy általános esetben az M nem feltétlenül valódi martingál. Az intenzitást tartalmazó integrál speciális esete az általános kompenzátor fogalmának. A specialitás abból ered, hogy a kompenzátorról feltesszük, hogy deriválható. Megmutatható, hogy minden N pontfolyamathoz található egy olyan (N^p módon jelölt) előrejelezhető, monoton növekedő és jobbról folytonos[5] folyamat, hogy az $N - N^p$ kifejezés lokális martingál. Ha az N^p folytonos, akkor azt szokás mondani, hogy az N folytonosan kompenzálható. Az intenzitás létezésének feltétele azt jelenti, hogy a kompenzátor nemcsak folytonos, hanem abszolút folytonos is, és a kompenzátor deriváltja éppen az intenzitás. Folytonos esetben a kompenzátor interpretációja igen kézenfekvő. Az N egy olyan ugró folyamat, amely a véletlenszerűen megjelenő egységnyi veszteségek összegét adja meg. Az N^p egy olyan folyamatosan fizetett biztosítási díjként interpretálható, amely az átlagban eltekinthetőnek gondolható lokális martingál erejéig költség szempontból átlagban azonos az N-nel.

A lokális martingál feltételnek számos előnye van, többek között az, hogy a kompenzátor kiszámolására használható a következő egyszerűen alkalmazható kritérium.

2. Állítás. *Egy N^p előrejelezhető folyamat pontosan akkor lesz az N számláló*

[4] A lokális martingál fogalma mögött intuitíve egy olyan folyamat értendő, amely statisztikai értelemben elhanyagolható és lényegében a szokásos „hibatag" sztochasztikus analízisben használt absztrakciója. A későbbiek szempontjából nem lényeges, hogy az olvasó pontosan értse a lokális martingál kifinomult fogalmának részleteit. A lényeges észrevétel az, hogy a definíció szerint az N számláló folyamat két részre bontható: egy trend tagra és egy hibatagra. A definíció lényeges feltétele az, hogy a trend tag egy differenciálható trajektóriákkal rendelkező folyamat és a trend deriváltja éppen az intenzitás. A továbbiak megértése szempontjából a kulcs megjegyzés az, hogy az N hibatagra és trendre való felbontása változhat az ekvivalens mértékcserével. Az ekvivalens mértékcsere képes a trendet megváltoztatni a hibatag rovására, ugyanis egy valószínűségi változó várható értéke a valószínűségi mértéktől is függ és nem csak a változótól. A meglepő matematikai eredmény, amely az alábbi gondolatmenet kiindulópontja, hogy intenzitással rendelkező folyamat esetén az ekvivalens mértékcserével módosított új trend szintén deriválható lesz. Vagyis a deriválható trend létezése független az aktuális ekvivalens mértéktől, bár a trend nagysága nyilván változhat. Következésképpen a lehetséges mértékcserék az intenzitás segítségével modellezhetők.

[5] Az előrejelezhetőség ismét egy a sztochasztikus analízisben használt jól definiált fogalom, amely alatt az olvasó gondolhat a folytonosságra is, ugyanis minden folytonos folyamat előrejelezhető is. Emlékeztetünk, hogy az előrejelezhető folyamatok σ-algebrája éppen a folytonos, adaptált folyamatok generálják. Vagyis bár nem tudjuk mindig garantálni azt, hogy a kompenzátor folytonos legyen, legalább a mérhetőségi struktúra szintjén megpróbáljuk a folytonosságot „megtartani". Ugyanakkor most is egy olyan technikai részletről van szó, amely az általános keret miatt szükséges, valójában éppen az a célunk, hogy megmutassuk, elég a deriválható folyamatokkal foglalkozni.

folyamat kompenzátora, ha tetszőleges C előrejelezhető folyamat esetén

$$\mathbf{E}\left(\int_0^\infty C_s\,dN(s)\right)=\mathbf{E}\left(\int_0^\infty C_s\,dN^p(s)\right)\,.$$

Speciálisan egy $\lambda_s \geq 0$ progresszíven mérhető folyamat pontosan akkor lesz az N számláló folyamat intenzitása, ha tetszőleges C előrejelezhető folyamat esetén

$$\mathbf{E}\left(\int_0^\infty C_s\,dN(s)\right)=\mathbf{E}\left(\int_0^\infty C_s\lambda_s\,ds\right)\,.$$

Mielőtt továbbmegyünk, érdemes a tétel közgazdasági interpretációjára röviden kitérnünk. A definícióban szereplő C folyamat igen absztrakt szinten portfóliósúlyoknak tekinthető. A C előrejelezhetősége pedig éppen azt jelenti, hogy a befektetés során használt súly nem függ a következő ugrás időpontjától, azaz nem kötünk biztosítást azt követően, hogy a káresemény már bekövetkezett. Mivel az N számláló folyamat diszkrét időpontokban egységnyi ugrásokat tartalmaz, így a várható értékben szereplő $\int_0^\infty C_s\,dN(s)$ integrál a

$$\int_0^\infty C_s\,dN(s)=\sum_{k=0}^{\infty}C(\tau_k)\,,$$

kifejezésre egyszerűsödik, vagyis a τ_k időpontokban bekövetkező károk esetén az éppen akkor aktuális portfólió nagysága kerül kifizetésre. A lényeges észrevétel, hogy a kifizetések véletlen, de diszkrét időpontokban jelentkeznek. A másik oldalon szereplő $\int_0^\infty C_s\,dN^p(s)$ integrál az N^p (jellemzően folytonos) folyamat által meghatározott díjfizetéseket tartalmazza. A két várható érték azonossága pontosan azt jelenti, hogy az üzlet két ága átlagban azonos eredményre vezet. Összefoglalva tehát tetszőleges N számláló folyamathoz tartozik egy olyan díjfolyamat, amely segítségével az N-ben diszkrét módon felmerülő kifizetések kisimíthatóak, vagyis a kockázatok, legalábbis átlag szintjén kompenzálhatóak egy folytonos díjfizetés által. A tétel természetesen igen absztrakt, bizonyítása pedig meghaladja a dolgozat kereteit, ám az érdeklődő Olvasó a legtöbb sztochasztikus analízissel foglalkozó könyvben megtalálhatja (ld. pl. [9]).

De mi történik a mértékcsere során? Mivel a számláló folyamatok definíciójában csak mérhetőségi feltételek játszanak szerepet, így N az új mérték alatt is számláló folyamat marad, tehát az a tény sem változik, hogy rendelkezik kompenzátorral, mely természetesen nem feltétlenül lesz azonos az eredetivel. De milyen családban keressük az új kompenzátort? Ugyan a későbbiekben erre nem lesz szükségünk, de érdemes megjegyezni, hogy egy N számláló folyamat N^p kompenzátora pontosan akkor folytonos, ha az ugrásokat megadó megállási idők nem előrejelezhetőek[6]. A megállási idők előrejelezhetősége nem függ a mértékcserétől, következésképpen a kompenzátor

[6]Egy σ megállási idő előrejelezhetősége definíció szerint azt jelenti, hogy megadható egy olyan (σ_k) megállási időkből álló sorozat, amely „figyelmeztet" a σ bekövetkezésére, vagyis a (σ_k) szigorúan monoton növekedőleg tart a σ-hoz, azaz $\sigma_k \nearrow \sigma$. Ha nem tudunk

folytonossága is invariáns a mértékcserére nézve. A tárgyalás kiindulópontja a következő tétel.

3. Tétel (Artzner–Delbaen). *Ha N egy intenzitással rendelkező számláló folyamat valamilyen $\mathbf{P}$ valószínűségi mérték alatt, akkor az N intenzitással rendelkező számláló folyamat minden $\mathbf{P}$-vel ekvivalens $\mathbf{Q}$ valószínűségi mérték alatt is.*

A tétel bizonyításának megismerése nem szükséges a dolgozat további gondolatmenetének megértéséhez, így az elhagyható. Mégis úgy gondoljuk, hogy részletes közlése segítheti a téma iránt mélyebben érdeklődő Olvasó munkáját, hiszen az állítás nem tartozik a sztochasztikus analízis általános elméletéhez, így kevésbé ismert. Ugyanakkor a tétel tartalmának megértése a későbbi gondolatmenet alapja: a számláló folyamat intenzitásának létezése univerzális, vagyis tetszőleges ekvivalens mérték esetén fennálló tulajdonság. A mértékcsere hatása tehát az intenzitások modellezésével megoldható.

Bizonyítás. Jelölje Z az ekvivalens mértékcserét megvalósító $d\mathbf{Q}/d\mathbf{P}$ Radon–Nikodym-deriváltat és legyen $Z_t \overset{\circ}{=} \mathbf{E}^{\mathbf{P}}(Z \mid \mathcal{F}_t)$ a derivált folyamat. A $\mathbf{Q}$ alatti intenzitás meghatározását az előzőekben idézett állítás alapján fogjuk elvégezni. Tekintsük a következő számolást:

$$\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\int_0^\infty C_s\,dN(s)\right) = \mathbf{E}^{\mathbf{P}}\left(\int_0^\infty C_s\,dN(s)Z\right) = \mathbf{E}^{\mathbf{P}}\left(\sum_k C(\tau_k)Z\right) =$$

$$= \sum_k \mathbf{E}^{\mathbf{P}}(C(\tau_k)Z) = \sum_k \mathbf{E}^{\mathbf{P}}(C(\tau_k)\mathbf{E}(Z \mid \mathcal{F}_{\tau_k-}))\,,$$

ahol $\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}$ értelemszerűen a $\mathbf{Q}$ alatti várható értéket jelöli. Vegyük észre, hogy kihasználtuk, hogy mivel a C folyamat előrejelezhető, ezért a $C(\tau_k)$ mérhető az $\mathcal{F}_{\tau_k-}$ σ-algebrára nézve. A bizonyítás végén megmutatjuk, hogy létezik olyan K előrejelezhető folyamat, hogy minden k indexre $\mathbf{E}^{\mathbf{P}}(Z \mid \mathcal{F}_{\tau_k-}) = K(\tau_k)$. Ezt kihasználva az előbbieket folytatva:

$$\sum_k \mathbf{E}^{\mathbf{P}}(C(\tau_k)\mathbf{E}(Z \mid \mathcal{F}_{\tau_k-})) = \sum_k \mathbf{E}^{\mathbf{P}}(C(\tau_k)K(\tau_k)) =$$

$$= \mathbf{E}^{\mathbf{P}}\left(\int_0^\infty C_sK_s\,dN(s)\right) = \mathbf{E}^{\mathbf{P}}\left(\int_0^\infty C_sK_s\lambda_s\,ds\right) =$$

$$= \int_0^\infty \mathbf{E}^{\mathbf{P}}(C_sK_s\lambda_s)\,ds = \int_0^\infty \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}(C_sK_s\frac{1}{Z_s}\lambda_s)\,ds =$$

$$= \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\int_0^\infty C_sK_s\frac{1}{Z_s}\lambda_s\,ds\right)\,.$$

A számolás elejét és végét összevetve látható, hogy az N intenzitása a $\mathbf{Q}$ alatt éppen a λ_sK_s/Z_s folyamat.

megadni egy ilyen sorozatot, akkor a σ bekövetkezésének időpontja semmilyen módszerrel nem látható előre. Az említett tétel szerint az N folyamatnak pontosan akkor van folytonos kompenzátora, ha az egyedi károk előrejelezhetetlenek, ahol az előrejelezhetetlenséget akár köznapi értelemben is használhatjuk.

A bizonyítás befejezéseként be kell látnunk a K folyamat létezését, melyre több lehetőségünk is adódik attól függően, hogy miképpen definiáljuk az $\mathcal{F}_{\tau-}$ σ-algebrákat. A legegyszerűbb megoldás talán a következő: tetszőleges τ megállási idő esetén jelölje $\mathcal{F}_{\tau-}$ azt a σ-algebrát, amelyet azok az $X(\tau)$ alakú változók generálnak, ahol az X folyamatok a folytonos és adaptált folyamatok osztályát futják be. Definíció szerint legyen tehát $\mathcal{F}_{\tau-}$ az a legszűkebb σ-algebra, amelyre nézve az $X(\tau)$ megállított változók mérhetőek minden folytonos és adaptált folyamat esetén. A monoton osztály tételből közvetlenül következik, hogy az $X(\tau)$ mérhető lesz minden olyan X folyamat esetén, amely mérhető a folytonos és adaptált folyamatok által generált σ-algebrára nézve, vagyis az $X(\tau)$ mérhető minden előrejelezhető folyamat esetén, ugyanis definíció szerint az előrejelezhető folyamatok éppen a folytonos és adaptált folyamatok által generált σ-algebrára nézve mérhető folyamatok halmaza. Ebből következően megadhatóak olyan K_n előrejelezhető folyamatok, amelyekre

$$K_n(\tau_n) = \mathbf{E}^{\mathbf{P}}(Z \mid \mathcal{F}_{\tau_n-}) \ .$$

Vezessük be a $K \overset{\circ}{=} \sum_n \chi((\tau_{n-1}, \tau_n])K_n$ folyamatot. Világos, hogy $K(\tau_n) = K_n(\tau_n)$ minden n index esetén. Az állítás bizonyításához elég megmutatni, hogy az $X_n \overset{\circ}{=} \chi((\tau_{n-1}, \tau_n])$ folyamatok mindegyike előrejelezhető. Vegyük észre, hogy

$$X_n = \chi([0, \tau_n]) - \chi([0, \tau_{n-1}]) \ ,$$

így elég belátni, hogy tetszőleges τ megállási idő esetén az $X \overset{\circ}{=} \chi([0, \tau])$ folyamat előrejelezhető. Legyen

$$Y_n(t, \omega) \overset{\circ}{=} \begin{cases} 1, & \text{ha } t \leq \tau(\omega) \\ 1 - n(t - \tau(\omega)), & \text{ha } \tau(\omega) < t < \tau(\omega) + 1/n \\ 0, & \text{ha } t \geq \tau(\omega) + 1/n \ . \end{cases}$$

Könnyen látható, hogy Y_n folytonos és adaptált. Mivel $Y_n \to X$, ezért az X előrejelezhető. □

A következő kérdés az, hogy miként módosíthatjuk mértékcserével az intenzitást. Ehhez és a későbbiek megértéséhez azonban röviden emlékeztetnünk kell az úgynevezett Doléans-formulára és tulajdonságaira.

Idézzük fel, hogy a szemimartingál fogalma tekinthető a trend plusz hibatag felbontás általánosításának, tehát a szemimartingálokra a legegyszerűbb például éppen a számláló folyamatok szolgálnak. Természetes kérdésként merül fel, hogy miként érdemes definiálni az exponenciális függvényt e folyamatok esetében. Az exponenciális függvény legfontosabb tulajdonsága, hogy önmaga deriváltja, ám távolról sem nyilvánvaló, hogy egy sztochasztikus folyamat esetén miként értelmezzük a derivált fogalmát. A szemimartingálok speciális esetében viszont egyszerűen definiálhatjuk az integrált[7], így az exponenciális függvényt differenciál- helyett integrálegyenlettel adjuk meg:

[7]Érdemes emlékeztetni arra, hogy számos szerző éppen úgy definiálja a szemimartingálokat, mint azon folyamatok osztályát, amelyek esetén az integrál értelmezhető.

4. Definíció. *Ha X egy tetszőleges szemimartingál, akkor az*

$$E(t) = 1 + \int_0^t E(s-)\, dX(s)$$

sztochasztikus differenciálegyenlet megoldását $\mathcal{E}(X)$-szel fogjuk jelölni és az X-hez tartozó exponenciális szemimartingálnak fogjuk nevezni.

A szokásos differenciálásos jelölést használva a fenti Doléans-egyenletnek is nevezett kifejezés $dE = E_{-}dX$ alakban írható. Vegyük észre, hogy az exponenciális szemimartingál definíciója éppen arra épül, hogy az $y = \exp(ax)$ exponenciális függvény kielégíti a $dy = (ay)\, dx$ közönséges differenciálegyenletet. Az egyenlet megoldását a következő állítás tartalmazza.

5. Állítás (Doléans-formula). *Ha X egy tetszőleges szemimartingál, akkor a fenti Doléans-egyenlet rendelkezik egy $\mathcal{E}(X)$ módon jelölt egyértelmű megoldással, amelyre teljesülnek a következőek:*

1. *Ha az X véges változású, akkor az $\mathcal{E}(X)$ is véges változású.*
2. *Ha az X lokális martingál, akkor az $\mathcal{E}(X)$ is lokális martingál.*
3. *Az $\mathcal{E}(X)$ felírható a következő formulával:*

$$\mathcal{E}(X) = \exp\bigl(X - X(0) - \frac{1}{2}[X]^c\bigr) \prod (1 + \Delta X) \exp(-\Delta X) \ .$$

Érdemes ismét néhány kiegészítő megjegyzést tennünk, ugyanis a formula első ránézésre talán nehezen áttekinthető. A kifejezés tartalmának megértéséhez gondoljunk arra, hogy a közgazdaságtanban az exponenciális függvényt elsősorban a bankbetétek alakulásának leírására szokás használni. Az egyszerű interpretáció céljából tehát tegyük fel, hogy X a kamatlábak folyamata, $\mathcal{E}\,(X)$ pedig az indukált bankbetét alakulását adja meg. Az X folyamat felbontható egy folytonos rész és a ΔX módon jelölt ugrások összegére. Az exponenciális függvény az összegeket szorzatba viszi, ebből következően az additív ugrások hatása az exponenciális függvényben multiplikatív alakban jelentkezik. Az $\mathcal{E}(X)$ formula két részre bontható, melyek közül valószínűleg a második tag áttekintése egyszerűbb, ahol a $\prod$ szimbólum értelemszerűen azt jelenti, hogy az $(1 + \Delta X) \exp(-\Delta X)$ tagokat minden esetben az adott t időpontig össze kell szorozni. Az $\exp(-\Delta X)$ kifejezéseket azért szerepeltetjük az $1 + \Delta X$ tagokkal együtt, mert ezek nélkül esetlegesen a szorzat nem lenne konvergens. Ha azonban ettől eltekintünk, vagyis ha feltesszük, hogy a szorzat ezek nélkül is konvergens, továbbá az $\exp(-\Delta X)$ tagokat átvisszük az exponenciális függvénybe, akkor a kitevőben szereplő negatív jel miatt az ugrások levonhatjuk az X-ből és ilyenkor az $\exp(x)$ exponenciális függvényben a folyamat folytonos része szerepel, míg a produktumban pedig csak az $1 + \Delta X$ ugrások szorzata marad. Ez teljesen analóg avval, hogy ha adott az r_i kamatlábak egy sorozata, akkor a kamatos kamat szabálya szerint a betét adott időszakban való növekménye éppen $\prod_i (1 + r_i)$, vagyis diszkrét sorozat esetén az exponenciális függvényt a kamatos kamat szabályának megfelelően kell számolni.

Jóval fogósabb az első tag intuitív tartalmának megértése. Az előzőek alapján legyen tehát az X egy folytonos folyamat. Ebben az esetben az egyetemi tananyagban is szereplő Itô-kalkulus szabályai alkalmazandóak, ám attól még, hogy egy folyamat folytonos, nem biztos, hogy deriválható is. Ha az X folyamatot kis dX folyamatok összegeként képzeljük el, akkor egy ilyen növekményen a hagyományos $\exp(x)$ exponenciális függvény infinitezimálisan az $1 + dX$ hatást gyakorolja, feltéve, hogy a másodrendű $1/2(dX)^2$ tag már elég kicsi, mely akkor teljesül, ha X deriválható. Ha nem ez a helyzet, akkor az $\exp(x)$ exponenciális függvény hatása

$$1 + dX + \frac{1}{2}(dX)^2$$

lesz, feltéve, hogy már a harmadrendű tag elég kicsi. Az Itô-kalkulus érdemi észrevétele éppen az, hogy nincsen szükség a harmadrendű tagokra, elég a másodrendű korrekciót alkalmazni. Ez másképpen fogalmazva azt jelenti, hogy a hagyományos $\exp(x)$ exponenciális függvény a sztochasztikus $\mathcal{E}(X)$ transzformációhoz képest az $1/2(dX)^2$ taggal ,,túllő a célon", ugyanis például a kamatláb hatása a bankbetétre továbbra is természetesen $1+dX$ szorzóként jelentkezik. Ha a hagyományos exponenciális függvénnyel akarjuk kifejezni a sztochasztikus exponenciális transzformációt, akkor ezt a tagot le kell vonni. Mivel az X folyamat a dX növekmények összege, így az exponenciális függvény ezek szorzata:

$$\mathcal{E}(X) = \exp\bigl(X - X(0) - \frac{1}{2}\sum(dX)^2\bigr) ,$$

ahol a $\sum(dX)^2$ tag a másodrendű megváltozások összege, amit kvadratikus variációnak szokás nevezni és $[X]$ módon szokás jelölni[8].

A Doléans-formula ismeretében térjünk vissza a mértékcsere kérdéséhez.

6. Tétel. *Legyen N egy intenzitással rendelkező számláló folyamat és jelölje (τ_k) az N ugrásainak időpontját, valamint legyen*

$$M(t) \overset{\circ}{=} N(t) - \int_0^t \lambda_s \, ds$$

a kompenzált számláló folyamat. Ha $\varphi \geq 0$ egy olyan előrejelezhető folyamat, amelyre $\int_0^t \lambda_s \varphi_s \, ds < \infty$, akkor a

$$Z(t) \overset{\circ}{=} \exp\Bigl(\int_0^t (1 - \varphi_s)\lambda_s \, ds\Bigr) \prod_{\tau_i \leq t} \varphi(\tau_i) ,$$

folyamat lokális martingál. Ha a Z egyenletesen integrálható martingál, akkor a $d\mathbf{Q}/d\mathbf{P} \overset{\circ}{=} Z(\infty)$ mértékcsere után az N intenzitása $\lambda\varphi$ lesz[9]*.*

---

[8] Az eredeti képletben szereplő c felső index arra utal, hogy a folytonos részét kell venni az X kvadratikus variációjának.

[9] A tétel tekinthető a klasszikus Girszanov-tétel általánosításának. A probléma pontosan ugyanaz, mint a klasszikus esetben.

A bizonyítás ugyan a Doléans-formula közvetlen következménye és egyszerű számolással megkapható, ám ismételten nem szükséges a dolgozat további gondolatmenetének megértéséhez. Amit fontos látni az a következő: a tétel egy módszert tartalmaz arra nézve, hogy miként lehet egy adott intenzitáshoz megkeresni a hozzá tartozó mértéket. Ha egy N folyamat intenzitását ki akarjuk cserélni egy $\lambda\varphi$ folyamatra, akkor a φ folyamatnak két feltételt kell teljesítenie: egyrészt a $\lambda\varphi$ folyamatnak szintaktikusan helyesnek kell lennie, hiszen ha az $\int_0^t \lambda_s\varphi_s\,ds$ integrál nem véges, akkor definíció szerint a $\lambda\varphi$ nem lehet intenzitás. Ez a dolog kevésbé érdekes része. Ugyanakkor a tételben szereplő Z kifejezésnek bizonyos korlátozó feltételeknek is eleget kell tennie, azaz nem minden szintaktikusan megfelelő $\lambda\varphi$ folyamat lehet intenzitás. A tételben szereplő feltételt legegyszerűbben akkor tudjuk teljesíteni, ha a Z folyamat korlátos. Ha a φ kicsi (például kisebb mint egy), akkor a szorzat gyorsan konvergál és korlátos lesz, de ilyenkor az integrál alatt szereplő $1-\varphi$ tag nagy lesz, legalábbis pozitív, így az integrálról nem tudjuk, hogy korlátos lesz vagy sem. A tétel tehát a lehetséges példák konstruálásának nehézségeit mutatja be.

A formula megértéséhez legyen N egy Poisson-folyamat $\lambda_s \equiv \lambda$ konstans intenzitásparaméterrel. A Z nemnegatív lokális martingál, így szupermartingál, következésképpen ha nem veszti a várható értéket, akkor valódi martingál. Legyen φ egy tetszőleges nemnegatív konstanst, ekkor:

$$\mathbf{E}(Z_t) = \mathbf{E}\Big(\exp\Big(\int_0^t (1-\varphi_s)\lambda_s\,ds\Big)\prod_{\tau_i\le t}\varphi(\tau_i)\Big) =$$

$$= \mathbf{E}(\exp(\lambda t - t\varphi\lambda)\varphi^N) = \exp(\lambda t - t\varphi\lambda)\sum_{k=0}^{n}\varphi^k\frac{(\lambda t)^k}{k!}\exp(-\lambda t) =$$

$$= \exp(\lambda t - t\varphi\lambda)\exp(\varphi\lambda t)\exp(-\lambda t) = 1\ .$$

Alkalmas mértékcserével tehát a Poisson-folyamat intenzitása bármilyen pozitív értékre kicserélhető. Következésképpen a statisztikailag megfigyelt intenzitás nem ad használható információt a kockázatsemleges mérték alatt.

Bizonyítás. Vezessük be az

$$U(t) \stackrel{\circ}{=} \int_0^t (\varphi_s - 1)\,dM(s) = \int_0^t (\varphi_s-1)\,dN(s) - \int_0^t (\varphi_s-1)\lambda_s\,ds$$

folyamatot. Első lépésként vegyük észre, hogy Z éppen a

$$Z(t) = 1 + \int_0^t Z(s-)\,dU(s)$$

Doléans-egyenlet megoldása. Valóban, mivel az U korlátos változású, ezért a Doléans-formulában szereplő kvadratikus variációs tag nulla. Az U ugrásai tehát megegyeznek az $\int_0^t(\varphi_s-1)\,dN(s)$ ugrásaival, amelyek éppen a $\varphi(\tau_k)-1$ kifejezések. Könnyen látható, hogy a $\prod\exp(-\Delta U)$ szorzata éppen az

$$\exp\Big(-\int_0^t (\varphi_s-1)\,dN(s)\Big)$$

kifejezés. Ezt beírva az imént tett megjegyzés már evidens. Mivel a φ előrejelezhető, ezért tetszőleges C előrejelezhető folyamat esetén

$$\mathbf{E}\Big(\int_0^\infty C_s(\varphi_s - 1)\, dN\Big) = \mathbf{E}\Big(\int_0^\infty C_s(\varphi_s - 1)\lambda_s\, ds\Big) ,$$

amiből következik, hogy az $\int_0^t (\varphi_s - 1)\, dN(s)$ folyamat kompenzátora éppen $\int_0^t (\varphi_s - 1)\lambda_s\, ds$ lesz. Következésképpen az U lokális martingál, így a Doléans-formula miatt a Z is lokális martingál.

Végezetül számoljuk ki az új kompenzátort. Miként az Artzner–Delbaen tétel bizonyításakor láttuk, az új mérték alatt a kompenzátor $\lambda K/Z$ lesz. Határozzuk meg a K folyamatot. Ha a Z egyenletesen integrálható, akkor minden n-re a megállási opciókról szóló tétel miatt

$$\mathbf{E}(Z \mid \mathcal{F}_{\tau_n -}) = \mathbf{E}(\mathbf{E}(Z \mid \mathcal{F}_{\tau_n}) \mid \mathcal{F}_{\tau_n -}) = \mathbf{E}(Z(\tau_n) \mid \mathcal{F}_{\tau_n -}) = Z(\tau_n) ,$$

ahol kihasználtuk, hogy mivel a φ előrejelezhető, így minden $\tau_k \leq \tau_n$ esetén a $\varphi(\tau_k)$ mérhető az $\mathcal{F}_{\tau_n -}$ σ-algebrára nézve. De mik lesznek a bizonyításban szereplő K_n függvények? Könnyen látható, hogy a

$$K_n(t) \stackrel{\circ}{=} \exp\Big(\int_0^t (1 - \varphi_s)\lambda_s\, ds\Big) \prod_{k=1}^{n-1} \varphi(\tau_k)\, \varphi(t)\, \chi(t > \tau_{n-1})$$

függvény adaptált és balról folytonos, így tehát előrejelezhető és ezért választható K_n függvénynek. A K konstrukciójából, illetve abból, hogy a $[\tau_{n-1}, \tau_n)$ szakaszokon a $\prod_{\tau_i \leq t} \varphi(\tau_i)$ kifejezés konstans, látható, hogy $K/Z = \varphi$. □

3 Duplán sztochasztikus folyamatok

Az intenzitással rendelkező számláló folyamatok fontos alosztályát alkotják a duplán sztochasztikus folyamatok.

7. Definíció. *Legyen N egy számláló folyamat és legyen $(\mathcal{F}_t)$ a hozzá tartozó filtráció. Ha az $(\mathcal{F}_t)$ egy alkalmas $(\mathcal{G}_t)$ részfiltrációjára létezik egy $\lambda_s \geq 0$ progresszíven mérhető, a $(\mathcal{G}_t)$ filtrációra adaptált folyamat, hogy minden $s < t$ és $k = 0, 1, \ldots$ esetén*

$$\mathbf{P}(N_t - N_s = k \mid \mathcal{F}_s \vee \mathcal{G}_t) = \frac{\left(\int_s^t \lambda_u\, du\right)^k}{k!} \exp\Big(-\int_s^t \lambda_u\, du\Big) ,$$

akkor azt mondjuk, hogy az N folyamat duplán sztochasztikus.

A duplán sztochasztikus folyamatok osztálya értelemszerűen a Poisson-folyamatok osztályát általánosítja. Poisson-folyamat esetén az intenzitás konstans, duplán sztochasztikus folyamat esetén „majdnem” konstans. Természetesen a definícióból nem evidens, hogy a duplán sztochasztikus folyamatok valóban az intenzitással rendelkező folyamatok egy alosztályát alkotják.

A definiáló egyenletet k-val beszorozva, majd összegezve és a Poisson-eloszlás várható értékének képletét használva viszont azonnal látható, hogy

$$\mathbf{E}(N_t - N_s \mid \mathcal{F}_s \vee \mathcal{G}_t) = \int_s^t \lambda_u \, du \, .$$

Mind a két oldalon az $\mathcal{F}_t$ szerint feltételes várható értéket véve és kihasználva, hogy a λ progresszíven mérhető volta miatt az integrál adaptált marad:

$$\mathbf{E}(N_t - N_s \mid \mathcal{F}_s) = \mathbf{E}(\int_s^t \lambda_u \, du \mid \mathcal{F}_s) = \int_s^t \lambda_u \, du \, ,$$

amiből – az eredeti (τ_k) megállási időket lokalizációs sorozatként használva – világos, hogy az $N(t) - \int_0^t \lambda_u \, du$ lokális martingál.

A duplán sztochasztikus folyamatok nagy előnye, hogy ilyenkor az összetett folyamat eloszlásának Laplace-transzformáltja az intenzitás segítségével számolható. Legyen (ξ_k) az egyes veszteségek nagysága, melyekről tegyük fel, hogy azonos eloszlásúak, továbbá függetlenek egymástól és az ugrások időpontját megadó N folyamattól. Az alapvető kérdés a következő: mi lesz az $X(t) \overset{\circ}{=} \sum_{k=1}^{N(t)} \xi_k$ összetett folyamat eloszlása? Mivel az eloszlás közvetlenül nem számolható, így a szokásos eljárás, hogy az összetett folyamat Laplace-transzformáltját határozzuk meg. Jelölje H az ugrások közös eloszlásának Laplace-transzformáltját és legyen $\psi(u) = 1 - H(u)$. Ha az N duplán sztochasztikus, akkor a definícióból, illetve a teljes várható érték tételből következően:

$$\begin{aligned}
L_t(u) = \mathbf{E}\big(\exp(-uX(t))\big) &= \mathbf{E}\Big(\exp\big(-u\sum_{k=1}^{N(t)}\xi_k\big)\Big) = \\
&= \mathbf{E}\Big(\mathbf{E}\Big(\exp\big(-u\sum_{k=1}^{N(t)}\xi_k\big) \mid N(t)=n\Big)\Big) = \\
&= \mathbf{E}\Big(\mathbf{E}\Big(\exp\big(-u\sum_{k=1}^{n}\xi_k\big) \mid N(t)=n\Big)\Big) = \\
&= \mathbf{E}\big(H^{N(t)}(u)\big) = \mathbf{E}\Big(\mathbf{E}\big(H^{N(t)}(u) \mid \mathcal{G}_t\big)\Big) = \\
&= \mathbf{E}\Big(\sum_{n=0}^{\infty} H^n(u)\frac{\big(\int_0^t \lambda_s \, ds\big)^n}{n!}\exp\big(-\int_0^t \lambda_s \, ds\big)\Big) \overset{\circ}{=} \\
&\overset{\circ}{=} \mathbf{E}\Big(\exp\big(-\psi(u)\int_0^t \lambda_s \, ds\big)\Big) \, .
\end{aligned}$$

A baj csak az, hogy az ekvivalens mértékcsere során a duplán sztochasztikus jelleg nem marad meg. Mit lehet mondani általában az intenzitásalapú modellekre?

4 Egy mértékcsere

A következőkben megvizsgáljuk, hogyan számolható ki az összetett

$$X(t) \overset{\circ}{=} \sum_{k=1}^{N(t)} \xi_k$$

folyamat kompenzátora tetszőleges intenzitásalapú modell esetén. Ismert, hogy az úgynevezett lokálisan integrálható folyamatoknak létezik kompenzátora, így ahhoz tehát, hogy beszélhessünk az összetett folyamat kompenzátoráról, az ugrások nagyságának véges várható értékkel kell rendelkeznie. A továbbiakban feltesszük, hogy a (ξ_k) ugrások nagysága azonos eloszlású, és az ugrás mindenkori nagysága független a folyamat múltjától. Ezt formálisan úgy definiáljuk, hogy minden k indexre a ξ_k ugrás független az $\mathcal{F}_{\tau_k-}$ σ-algebrától. Az $\mathcal{F}_{\tau_k-}$ szokásos interpretációja, hogy a τ_k véletlen időpont előtt bekövetkező események halmaza. Ugyanakkor, mivel az összetett folyamatnak adaptáltnak kell lenni, a $\xi_k = \Delta X(\tau_k)$ mérhető az $\mathcal{F}_{\tau_k}$-ra, így mielőtt továbbhaladhatnánk, be kell látnunk, hogy e feltétel nem mond ellent az előbbi követelményünknek.

Az összetett folyamatra az alapeset, amikor a filtráció éppen a folyamat által definiált kanonikus filtráció és a ξ_k ugrások egymástól és az N számláló folyamattól is függetlenek. Az $\mathcal{F}_{\tau_k-}$ σ-algebrának a korábban említettel egyik ekvivalens definíciója szerint az $\mathcal{F}_{\tau_k-}$ azon legszűkebb σ-algebra, amelyet az $\mathcal{F}_0$ és az olyan A halmazok generálnak, amelyek előállíthatóak $A = F \cap \{t < \tau_k\}$ módon, ahol $F \in \mathcal{F}_t$. Egy σ-algebrától való függetlenség igazolásához elég megmutatni a σ-algebrát generáló halmazoktól való függetlenséget. A kanonikus esetben az $X(0) = 0$ miatt $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, amely nyilván független a ξ_k-tól. Ha $F \in \mathcal{F}_t$, akkor a generált σ-algebra definíciója alapján alkalmas $s_k \leq t$ sorozatra és $B \subseteq \mathbb{R}^\infty$ Borel-halmazra $F = (X(s_1), X(s_2), \ldots)^{-1}(B)$. Ebből következően az $A \cap \{t < \tau_k\}$ halmaz eleme a $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{k-1}$ és az N által generált σ-algebrának, ami független a ξ_k-tól.

8. Lemma. *Ha a (ξ_k) ugrások közös eloszlásának van M várható értéke, akkor az $X \overset{\circ}{=} \sum_{k=1}^{N(t)} \xi_k$ összetett folyamatnak is van kompenzátora, amely éppen $X^p = M \cdot N^p$.*

A lemma interpretációja ismét igen kézenfekvő: a teljes kárfolyamatban figyelembe kell venni a károsemények gyakoriságát és nagyságát. Az összetett folyamat kompenzátora éppen a gyakorisági folyamat kompenzátora szorozva az átlagos kár nagyságával.

Bizonyítás. A várható érték létezése miatt az X szintén lokálisan integrálható, vagyis eleme az $\mathcal{A}_{\mathrm{loc}}$ térnek, így tehát létezik kompenzátora. A feltételezett függetlenség miatt a ξ_n ugrás független az $\mathcal{F}_{\tau_n-}$ σ-algebrától. Tetszőleges $C \geq 0$ előrejelezhető folyamat esetén, felhasználva, hogy a $C(\tau_k)$

mérhető az $\mathcal{F}_{\tau_k -}$ eseménytérre:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\Big(\int_0^\infty C_s\,dX_s\Big) &= \mathbf{E}\Big(\sum_{k=1}^\infty C(\tau_k)\xi_k\Big) = \sum_{k=1}^\infty \mathbf{E}(C(\tau_k)\xi_k) = \\ &= \sum_{k=1}^\infty \mathbf{E}\big(\mathbf{E}(C(\tau_k)\xi_k \mid \mathcal{F}_{\tau_k -})\big) = \\ &= \sum_{k=1}^\infty \mathbf{E}\big(C(\tau_k)\mathbf{E}(\xi_k \mid \mathcal{F}_{\tau_k -})\big) = \\ &= \sum_{k=1}^\infty \mathbf{E}\big(C(\tau_k)\mathbf{E}(\xi_k)\big) = M\cdot\mathbf{E}\Big(\int_0^\infty C_s\,dN_s\Big) = \\ &= M\cdot\mathbf{E}\Big(\int_0^\infty C_s\,dN_s^p\Big)\,,\end{aligned}$$

amiből a lemma már evidens. □

9. Állítás. *Tegyük fel, hogy az N^p kompenzátor folytonos. Vezessük be a $\nu_i \overset{\circ}{=} 1-\exp(-u\xi_i)$, $V \overset{\circ}{=} \sum_{k=1}^{N(t)} \nu_k$, valamint $U \overset{\circ}{=} V^p - V$ jelöléseket. A*

$$Z \overset{\circ}{=} \exp(\psi(u)\cdot N^p - u\cdot X)$$

folyamat felírható $Z = \mathcal{E}(U)$ módon, következésképpen a Z egy lokális martingál. Ha valamely T időpontban $\mathbf{E}(\exp(N^p(T))) < \infty$, akkor a Z egyenletesen integrálható martingál a $[0,T]$ időintervallumon.

Bizonyítás. Emlékeztetünk, hogy definíció szerint a $Z = \mathcal{E}(U)$ egyenlőség azt jelenti, hogy a Z éppen az egyetlen megoldása a

$$Z = 1 + Z_- \bullet U$$

egyenletnek. A Doléans-formula szerint (felhasználva, hogy az N^p folytonos, továbbá az előző lemma miatt $V^p = \psi(u)\cdot N^p$):

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(U) &= \exp(U - U(0) - [U]^c)\prod(1+\Delta U)\exp(-\Delta U) = \\ &= \exp(V^p - V)\prod(1-\Delta V)\exp(\Delta V) = \\ &= \exp(V^p)\prod(1-\nu_i\Delta N) = \\ &= \exp(V^p)\prod(1-(1-\exp(-u\xi_i))\Delta N) = \\ &= \exp(V^p)\exp(-uX) = \exp(V^p - uX) = \\ &= \exp(\psi(u)N^p - uX) \overset{\circ}{=} Z\,.\end{aligned}$$

Az U lokális martingál voltából következően a Z szintén lokális martingál. Mivel pedig $0 \le \psi(u) \le 1$, ezért

$$0 \le \exp(\psi(u)N^p - uX) \le \exp(N^p) \le \exp(N^p(T))\,.$$

A majorált konvergencia tétel közvetlen alkalmazásából az állítás már következik. □

Tetszőleges u esetén a $Z(T)$ tekinthető a $[0,T]$ időszakaszra megszorított folyamatokra egy mértékcsere sűrűségfüggvényének. Jelöljük a továbbiakban ezt a mértéket $\mathbf{P}^u$-val, az alatta vett várható értéket pedig $\mathbf{E}^u$-val. A $Z(T)$ definíciója alapján könnyen látható, hogy

$$\begin{aligned} L_t(u) &= \mathbf{E}(\exp(-uX(t))) = \mathbf{E}^u(\exp(-\psi(u)N^p(t))) = \\ &= \mathbf{E}^u\left(\exp\left(-\psi(u)\int_0^t \lambda_s\, ds\right)\right), \end{aligned}$$

azaz a mértékcsere segítségével (a duplán sztochasztikus folyamatok esetében látottakhoz hasonlóan) tetszőleges intenzitással rendelkező számláló folyamat Laplace-transzformáltját is ki tudjuk fejezni az intenzitás segítségével.

Az általános Girszanov-tétel miatt, ha az M egy lokális martingál, akkor az $M - Z^{-1} \bullet [Z, M]$ szintén lokális martingál az új mérték alatt. Mivel a Z korlátos változású, ezért ha az M folytonos, akkor a $[Z, M] = 0$. Ebből következően a mértékcsere nem érinti a folytonos lokális martingálokat, így például nem változik a Wiener-folyamatok osztálya sem.

10. Állítás. *Tegyük fel, hogy az N^p folytonos. Az N kompenzátora az új mérték alatt $H(u) \cdot N^p$ alakú, ahol N^p továbbra is az N kompenzátora az eredeti mérték alatt, a korábbiakhoz hasonlóan pedig $H(u)$ jelöli az ugrások eloszlásának Laplace-transzformáltját az eredeti mérték alatt. Legyen $g \geq 0$ egy Borel-mérhető függvény és legyen $Y \overset{\circ}{=} \sum_{k=1}^{N(t)} g(\xi_k)$. Tegyük fel, hogy a $(g(\xi_k))$ ugrásoknak van közös M várható értéke, így az Y-nak van kompenzátora az eredeti mérték alatt. Ha*

$$M(u) \overset{\circ}{=} \mathbf{E}^{\mathbf{P}}(g(\xi_k)\exp(-u \cdot \xi_k)),$$

akkor az Y kompenzátora az új mérték alatt $Y^p = M(u) \cdot N^p$.

Bizonyítás. Meg kell mutatni, hogy a

$$K \overset{\circ}{=} (Y - M(u) \cdot N^p) \cdot Z$$

lokális martingál az eredeti mérték alatt. A parciális integrálás formulája alapján

$$K = (Y - M(u) \cdot N^p)_- \bullet Z + Z_- \bullet (Y - M(u) \cdot N^p) + [Z, Y - M(u) \cdot N^p].$$

A Z definíciója alapján, felhasználva, hogy az N^p folytonos, Z pedig véges változású

$$[Z, Y - M(u) \cdot N^p] = [Z_- \bullet (V^p - V), Y] = -[Z_- \bullet V, Y] = -Z_- \bullet [V, Y].$$

Az integrátor kompenzátora az eredeti mérték alatt

$$[V, Y]^p = \left(\sum g(\xi_i)(1 - \exp(-u \cdot \xi_i))\Delta N\right)^p = (M - M(u)) \cdot N^p.$$

Következésképpen

$$\begin{aligned}K &= (Y - M(u)\cdot N^p)_- \bullet Z + Z_- \bullet (Y - M(u)\cdot N^p) - Z_- \bullet [V,Y] = \\ &= (Y - M(u)\cdot N^p)_- \bullet Z + Z_- \bullet (Y - M\cdot N^p) + \\ &\quad + Z_- \bullet ((M - M(u))\cdot N^p - [V,Y]) \,,\end{aligned}$$

ami lokális martingál, ugyanis mind a három integrálban az integrátor lokális martingál az eredeti mérték alatt. Ha $g \equiv 1$, akkor a tétel második feléből következik az első. □

Ha $g = \chi_B$, akkor a kompenzátor

$$Y^p = \frac{\mathbf{E}(\chi(\xi \in B)\exp(-u\xi))}{\mathbf{E}(\exp(-u\xi))}\mathbf{E}(\exp(-u\xi))\cdot N^p$$

módon is írható. Ilyenkor pedig az

$$\frac{\mathbf{E}(\chi(\xi \in B)\exp(-u\xi))}{\mathbf{E}(\exp(-u\xi))}$$

kifejezés tekinthető egy valószínűségi mértéknek, a szorzat második tagja pedig éppen az N kompenzátora az új mérték alatt. A formula tehát formálisan emlékeztet a korábbi lemmában szereplő kifejezésre, ám nem tudjuk, hogy a mértékcsere után az összetett eloszlásra alkalmazható lesz-e a lemma gondolatmenete, ugyanis kérdéses, hogy az azonos eloszlásra és a függetlenségre tett feltételek érvényben maradnak-e. A következőkben a célunk éppen az, hogy megmutassuk e feltételek fennállását az új mérték alatt is, ehhez viszont az előbbiekben bizonyított állítás jelenti a kiindulópontot.

11. Állítás. *Tegyük fel, hogy az N^p folytonos. Ha ξ az ugrások közül az egyik, akkor*

$$\mathbf{P}^u(\xi \in B) \overset{\circ}{=} \frac{\mathbf{E}^{\mathbf{P}}(\chi(\xi \in B)\exp(-u\xi))}{H(u)}\,,$$

vagyis az említett mérték éppen az ugrások eloszlása az új mérték esetén. Következésképpen az ugrások eloszlása a mértékcsere során egyformán változik.

Bizonyítás. Jelölje M a kifejezés jobb oldalát. Mivel a jobb oldalon álló kifejezés a $\mathbf{P}$ alatt számolandó, ezért az értéke minden n esetén azonos. Jelölje N^p az N kompenzátorát a $\mathbf{P}^u$ alatt. Legyen $C \overset{\circ}{=} \chi((\tau_{n-1},\tau_n])$. Mivel a C előrejelezhető, így az Y új mérték alatti kompenzátorát megadó összefüggést használva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\mathbf{P}^u(\xi_n \in B) &= \mathbf{E}^u(\chi_B(\xi_n)) = \mathbf{E}^u(Y(\tau_n) - Y(\tau_{n-1})) = \\ &= \mathbf{E}^u\Big(\int_0^\infty C_s\,dY\Big) = \mathbf{E}^u\Big(\int_0^\infty C_s\,dY^p\Big) = \\ &= M\cdot\mathbf{E}^u\Big(\int_0^\infty C_s\,dN^p\Big) = M\cdot\mathbf{E}^u\Big(\int_0^\infty C_s\,dN\Big) = M\,.\end{aligned}$$

□

12. Állítás. *Tegyük fel, hogy az N^p folytonos. Ekkor az új $\mathbf{P}^u$ mérték alatt is fennáll, hogy a ξ_k független az $\mathcal{F}_{\tau_{k-}}$ σ-algebrától.*

Bizonyítás. Nyilván elegendő megmutatni, hogy ξ_k független a σ-algebrát generáló halmazrendszertől. Legyen tehát F egy ilyen halmaz. Ha $F = A \cap \{\tau_k > t\}$, $A \in \mathcal{F}_t$, továbbá

$$C = \chi((\tau_{k-1}, \tau_k] \cap (t, \tau_k]) \cdot \chi_A$$

akkor a C előrejelezhető, mivel adaptált és balról folytonos. Ezért

$$\begin{aligned}\mathbf{P}^u(F \cap \xi_k^{-1}(B)) &= \mathbf{E}^u(\chi_F \chi_B(\xi_k)) = \mathbf{E}^u(\int_0^\infty C_s\,dY) = \mathbf{E}^u(\int_0^\infty C_s\,dY^p) = \\ &= \mathbf{E}^u\Big(\int_0^\infty \frac{\mathbf{E}^{\mathbf{P}}(\chi_B(\xi)\exp(-u\xi))}{H(u)} C_s\,dN^p\Big) = \\ &= \frac{\mathbf{E}^{\mathbf{P}}(\chi_B(\xi)\exp(-u\xi))}{H(u)} \mathbf{E}^u(\int_0^\infty C_s\,dN) = \\ &= \frac{\mathbf{E}^{\mathbf{P}}(\chi_B(\xi)\exp(-u\xi))}{H(u)} \mathbf{E}^u(\chi_F \Delta N(\tau_k)) = \\ &= \mathbf{P}^u(\xi^{-1}(B)) \cdot \mathbf{P}^u(F)\,.\end{aligned}$$

Ha $F \in \mathcal{F}_0$, akkor pedig az $C = \chi_F \chi(\tau_{k-1}, \tau_k]$ folyamatra alkalmazva kapjuk az állítást. □

5 Alkalmazási lehetőségek

A matematikai háttér áttekintése után röviden ismertetjük a számláló folyamatok felhasználási lehetőségét a hitelderivatívák modellezésében. Elsőként a legismertebb portfólió hitelderivatíva, a szintetikus CDO árazási alapelvét tekintjük át, majd rátérünk a Laplace-transzformált intenzitás által való kifejezésének jelentőségére.

Hitelderivatívák modellezése

A szintetikus CDO-k jellemzője, hogy az alapul szolgáló portfóliót n darab egységnyi névértékű, T lejáratú, illetve azonos (t_m) prémiumfizetési időpontokkal rendelező CDS alkotja. Egy adott CDO több különböző sávból (más néven tranche-ból) tevődik össze, melyeket az alsó és felső csatlakozási pontok határoznak meg (a továbbiakban ezeket rendre $\underline{K} \in [0, 1)$ és $\overline{K} \in (\underline{K}, 1]$ jelöli), s melyek megadják, hogy az adott tranche-ot választó befektető a portfóliót érő veszteség mekkora szeletét köteles téríteni. Egy adott tranche névértéke Kn, ahol $K \overset{\circ}{=} \overline{K} - \underline{K}$.

A védelem eladója a rendszeres S nagyságú spread-fizetések mellett a prémium egy részét a szerződéskötéskor előleg formjában is megkaphatja, ezt nevezzük *upfront fee*-nek, mely korábban elsősorban a legalsó (jellemzően 0 és 3% közé eső equity-nek nevezett) tranche-ot érintette. Az upfront fee-t

G-vel jelöljük, s a spread-hez hasonlóan a névértékre vetítve adjuk meg. A termék pénzáramlása a résztvevő felek szerint:

- A védelem eladója fedezi a portfólióban bekövetkező veszteségeket a bekövetkezés pillanatában, de csak abban az esetben, ha a kumulatív veszteség (melyet a korábbiakhoz hasonlóan jelöljön X) az alsó és felső csatlakozási pontok által meghatározott intervallumba esik. A védelem eladójának szemszögéből tehát az $U_t \overset{\circ}{=} (X_t - \underline{K}n)^+ - (X_t - \overline{K}n)^+$ veszteségfolyamat ugrásai a mérvadóak. E kifizetéseket nevezzük az adott tranche csődágának (*Default Leg, DL*).
- A védelem vevője a szerződéskötéskor kifizeti a GKn nagyságú upfront fee-t, majd a prémiumfizetések (t_m) időpontjaiban a tranche fennálló névértékre vonatkozó spread összegét: $SC_m(Kn - U_{t_m})$, ahol C_m a két prémiumfizetés között eltelt idő (a gyakorlatban erre negyedévente kerül sor, így $C_m \approx 1/4$). E kifizetéseket nevezzük az adott tranche prémium ágának (*Premium Leg, PL*).

Minél magasabb az alsó $\underline{K}$ csatlakozási pont, az eladó annál kisebb kockázatot vállal, s ebből következően annál kisebb prémiumra számíthat. Ennek oka, hogy elsőként az alsóbb tranche-ok fogják fel a veszteségeket, biztonsági hálót nyújtva a magasabb csatlakozási ponton beszálló eladónak. A legalsó, equity-nek nevezett $\underline{K} = 0$ csatlakozási pontú tranche a legkockázatosabb, hiszen minden felmerülő veszteséget téríteni köteles, amíg névértéke teljesen fel nem emésztődik. Épp e kockázatos voltából fakad, hogy a sztenderdizált kereskedése az upfront-ja alapján történik rögzített spread mellett, miközben a magasabb sávok esetében a spreadeket jegyezték rögzített $G = 0$ upfront mellett. A válság hatására az utóbbi években a kockázatosság megugrása miatt már a magasabb tranche-ok jegyzése is az upfront alapján történt.

A szerződéskötéskor a felek célja egy igazságos S spread meghatározása, amihez különböző időpontokban adott veszteségértékek (mint speciális termékek) igazságos árát kellene ismernünk. A szokásos gyakorlat a martingálmértékre épülő árazás technikájának felhasználása. Tehát a bevezető fejezetben ismertetett elv alapján feltesszük, hogy létezik egy ekvivalens $\mathbf{Q}$ mérték, hogy mind a csődág, mind a prémium ág t-beli értéke megkapható a kifizetések diszkontált értékének e mérték alatt vett várható értékeként:

$$\begin{aligned}
DL_t(\underline{K}, \overline{K}) &= \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\Big(\int_t^T B(t,s)\,dU_s \mid \mathcal{F}_t\Big) = \\
&= B(t,T)\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}(U_T \mid \mathcal{F}_t) - U_t + r\int_t^T B(t,s)\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}(U_s \mid \mathcal{F}_t)\,ds \\
PL_t(\underline{K}, \overline{K}, G, S) &= GKn + S\sum_{t_m \geq t} B(t,t_m)C_m(Kn - \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}(U_{t_m} \mid \mathcal{F}_t))\,,
\end{aligned}$$

ahol $B(t,s) \overset{\circ}{=} \exp(-r(s-t))$ a diszkontfaktor. Rögzített G upfront fee mellett a t időpontbeli igazságos $S \overset{\circ}{=} S_t(\underline{K}, \overline{K}, G, T)$ spread a $DL_t(\underline{K}, \overline{K}) = PL_t(\underline{K}, \overline{K}, G, S)$ egyenlet megoldásaként kapható.

Figyeljük meg, hogy az igazságos spread és upfront fee meghatározásakor valójában *call spread*-ek értékét kell megállapítanunk, ahol alaptermékül most nem egy részvény, hanem az X veszteségfolyamat szolgál:

$$B(t,s)\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}(U_s \mid \mathcal{F}_t) = B(t,s)(\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}((X_t - \underline{K}n)^+ \mid \mathcal{F}_t) - (\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}((X_t - \overline{K}n)^+ \mid \mathcal{F}_t) \; .$$

Intenzitásalapú modellek

Látható tehát, hogy az összetett X folyamat eloszlását kell meghatároznunk a portfólió hitelderiatívák árazása kapcsán. Az előzőekben említettek alapján ennek szokásos gyakorlata a Laplace-transzformált kiszámításán alapul, s mint megmutattuk, tetszőleges számláló folyamat Laplace-transzformáltja megkapható a kompenzátor $\mathbf{P}^u$ mérték alatt vett Laplace-transzformáltjaként:

$$L_t(u) = \mathbf{E}(\exp(-uX(t))) = \mathbf{E}^u\Big(\exp\big(-\psi(u)\int_0^t \lambda_s \, ds\big)\Big) \; ,$$

mely formálisan megegyezik a zérókupon kötvények sztochasztikus kamatlábak melletti árát megadó képlettel. Éppen ez az összefüggés az, mely az intenzitásalapú modellezés erősségét adja: a hitelderivatívák árazásához alkalmazhatóvá tehetjük a kamatlábak irodalmának kiterjedt eredményeit.

A kamatlábmodellek a kidolgozott elméleti háttér mellett meglepően sok olyan tulajdonsággal rendelkeznek, melyek képesek reprodukálni a hitelderivatívákkal kapcsolatos empirikus megfigyeléseket, mint amilyen például a bekövetkezések gyakoriságának átlaghoz visszahúzó jellege, illetve a csődök klasztereződésének jelensége.

Legyen például X továbbra is az összetett számláló folyamat, melynek ugrásai most a csődök bekövetkezésekor realizáló veszteséget reprezentálják, az X ugrásait számláló folyamat Λ intenzitása pedig legyen egy λ folyamat egyszerű affin függvénye[10], azaz $\lambda_t = R_0 + R_1\Lambda_t$. Tegyük fel továbbá, hogy a λ dinamikáját a következő sztochasztikus differenciálegyenlet írja le:

$$d\lambda_t = \mu(\lambda_t)\, dt + \sigma(\lambda_t)\, dW_t + \delta\, dX_t \; ,$$

ahol rögtön látható az öngerjesztő jelleg, hiszen X korábbi realizációja befolyásolja az intenzitást, nevezetesen λ minden egyes csőd esetén ugrik. Számítási szempontból kedvező (ám a megszorítással együtt is viszonylag bő) modellosztályt kapunk, ha a μ és σ függvényekre affin struktúrát tételezünk fel, azaz $\mu(x) = \mu_0 + \mu_1 x$, $\sigma^2(x) = \sigma_0 + \sigma_1 x$, valamilyen konstans μ_0 és μ_1, illetve σ_0 és σ_1 együtthatók mellett. Ekkor ugyanis a jól ismert Vasicek- és CIR-modellek gondolatmenetéből kiindulva reménykedhetünk abban, hogy a Laplace-transzformált megadható valamilyen kezelhető alakban.

[10] A kiindulásul szolgáló (azaz esetünkben a kockázatsemleges) mérték alatt élünk a $\Lambda_t = \lambda_t$ feltételezéssel, azaz $R_0 = 0$ és $R_1 = 1$. A paraméter szerepeltetésének oka, hogy (mint a következőkben látni fogjuk) először az eredeti mérték alatt vizsgájuk a várható érték meghatározását, s csak ezután térünk át a $\mathbf{P}^u$ alatt vett kifejezés kiszámítására. Amint pedig a korábbiakban láthattuk, ekkor az intenzitás egy konstanssal skálázódik át, tehát az eredeti folyamat affin függvénye lesz. Így a mértékcsere hatása a paraméterek változásán keresztül válik követhetővé.

Az egyszerűség érdekében egy pillanatra tekintsünk el attól a ténytől, hogy a várható értéket a $\mathbf{P}^u$ mérték alatt kell meghatároznunk. Ebben az esetben a kamatlábak affin lejárati szerkezetére (*Affine Term Structure*) gondolva az a sejtésünk támadhat, hogy az előrejelezhető kompenzátor $\psi(u)$ helyen vett Laplace-transzformáltja (mely értelmezhető egy zérókupon kötvény áraként) megadható az

$$\mathbf{E}\Big(\exp(-\psi(u)\int_0^t \lambda_s\, ds)\Big) = \exp\big(\alpha(0) + \beta(0)\lambda_0\big)$$

alakban, ahol az α és β függvények analitikusan, vagy legalábbis könnyen kiszámolható formában adottak. Valóban, bizonyos technikai feltételek fennállása esetén a [4] dolgozat eredményei alapján a fenti várható érték előáll ilyen alakban, az α, β függvényeket pedig közönséges (általánosított Riccati-) differenciálegyenletek megoldásával kaphatjuk:

$$\begin{aligned}
\partial_t\beta(t) &= \psi(u) - \mu_1\beta(t) - \frac{1}{2}\sigma_1\beta^2(t) - R_1(H(1-\beta(t)))\\
\partial_t\alpha(t) &= \mu_1\beta(t) - \frac{1}{2}\sigma_0\beta^2(t) - R_0(H(1-\beta(t)))\\
\beta(t) &= 0, \qquad \alpha(t) = 0\ ,
\end{aligned}$$

ahol $H(u)$ továbbra is az ugrások Laplace-transzformáltja a kiindulásul szolgáló mérték alatt.

Igen ám, de a számunkra a $\mathbf{P}^u$ mérték alatt vett várható érték meghatározása a cél. Itt válnak fontossá a korábbi fejezet mértékcserét vizsgáló tételei. Nevezetesen beláttuk, hogy a Wiener-folyamatok invariánsak a mértékcserére nézve, a számláló folyamat intenzitása a 10. állítás alapján (a konstans $H(u)$ szorzóval) módosul, míg a ugrások eloszlása a 11. állítás alapján változik meg. Ez alapján minden szükséges ismeret a rendelkezésünkre áll, hogy a $\mathbf{P}^u$ mérték alatt alkalmazzuk a várható érték meghatározására szolgáló állítást. Mindössze arra kell figyelnünk, hogy az eredeti $R_0 = 0$ és $R_1 = 1$ helyett az $R_0 = 0$ és $R_1 = H(u)$ paramétereket használjuk összhangban a számláló folyamat új intenzitásával, a fenti differenciálegyenletekben szereplő Laplace-transzformáltat pedig már az új $\mathbf{P}^u$ mérték alatt kell vennünk.

6 Összefoglalás

A dolgozatban röviden áttekintettük az intenzitásalapú modellezés matematikai pénzügyi problémáit. Miként hangsúlyoztuk, a biztosításmatematikával szemben a pénzügyi elméletben a káreseményekből származó összetett veszteségfolyamat eloszlásának meghatározásakor olyan módszereket szabad csak használni, amelyek robusztusak az alapul vett mértékcserére és a modell felírásakor csak igen korlátozottan támaszkodhatunk az alapul vett kárfolyamatok konkrétan megfigyelt statisztikai tulajdonságaira, ugyanis az árazáskor használt módszerek csak formálisan emlékeztetnek a klasszikus eljárásra. Az itt tárgyalt módszer lényege, hogy a pénzügyi elméletben jól kidolgozott kamatlábmodellekkel tetszőleges mérték alatt közvetlenül kiszámolhatjuk az összetett kárfolyamat Laplace-transzformáltját. A Laplace-transzformált invertálásával már a közismert (a biztosításmatematikában is használt) módon az összetett veszteségfolyamat kockázatsemleges mérték melletti eloszlása is kiszámolható. A módszer előnye, hogy robusztus és minimális matematikai előfeltételre épül, továbbá közvetlenül felhasználhatóvá teszi a kamatlábmodellek irodalmát, illetve az ezen a területen felhalmozott jelentős ismereteket. A módszer hátránya, hogy közvetlenül nem az eloszlást adja, hanem annak Laplace-transzformálját, és ezért a kalibrációt az eloszlás Laplace-transzformációján keresztül kell elvégezni, ami komoly numerikus terhet jelent.

Irodalom

1. Artzner, P. – Delbaen, F. (1995): Default Risk Insurance and Incomplete Markets. *Mathematical Finance* 5, pp. 187–195.
2. Carr, P. – Madan, D (1999): Option Valuation Using the Fast Fourier Transform. *Journal of Computational Finance* 3, pp. 61–73.
3. Cheng, P. – Scaillet, O. (2007): Linear-Quadratic Jump-Diffusion Modeling. *Mathematical Finance* 17, pp. 575–598.
4. Duffie, D. – Pan, J. – Singleton, K. (2000): Transform Analysis and Asset Pricing for Affine Jump-Diffusions. Econometrica 68, pp. 1343–76.
5. Giesecke, K. – Zhu, S. (2010): Transform Analysis for Point Processes and Applications in Credit Risk. *Working paper.*
6. Jacod, J. – Shiryaev, A. N. (1987): *Limit Theorems for Stochastic Processes.* Springer-Verlag, Berlin.
7. Kusuoka, S. (1999): A Remark on Default Risk Models. *Advances in Mathematical Economics* 1, pp. 69–82.
8. Markus, L. – Wu, L. (2002): Asset Pricing Under the Quadratic Class. *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 37, pp. 271–295.
9. Medvegyev, P. (2007): *Stochastic Integration Theory.* Oxford University Press, Oxford.

INTENSITY-BASED MODELING AND THE CHANGE OF MEASURE

The paper addresses questions concerning the use of intensity based modeling in the pricing of credit derivatives. As the specification of the distribution of the loss-process is a non-trivial exercise, the well-know technique for this task utilizes the inversion of the Laplace-transform. A popular choice for the model is the class of doubly stochastic processes given that their Laplace-transforms can be determined easily. Unfortunately these processes lack several key features supported by the empirical observations, e.g. they cannot replicate the self-exciting nature of defaults. The aim of the paper is to show that by using an appropriate change of measure the Laplace-transform can be calculated not only for a doubly stochastic process, but for an arbitrary point process with intensity as well. To support the application of the technique, we investigate the effect of the change of measure on the stochastic nature of the underlying process.

JAVASLAT AZ OPTIMÁLIS JÁRADÉKFÜGGVÉNYRE[1]

BANYÁR JÓZSEF
Budapesti Corvinus Egyetem

A tanulmány Simonovits András optimális járadékfüggvényt vizsgáló tanulmányaihoz kapcsolódik. Más eszközökkel, mint ő, szemléletesen bemutatom a hiperbolikus járadékfüggvény általa feltárt és leírt hibáit, majd ugyanezekkel az eszközökkel megmutatok egy egész függvénycsaládot, amelyek elkerülik ezeket a hibákat, s így eleget tesznek Simonovits optimális járadékfüggvényre megalkotott kritériumainak. Majd összehasonlítom ezeket a járadékfüggvényeket a tapasztalati halandóság alapján konstruáltakkal, mint olyanokkal, amelyeket a gyakorlatban alkalmazni szoktak, s megállapítom, hogy azok nagyon hasonlítanak a gyakorlati járadékfüggvényekre. Egyben kiterjesztem elemzésemet —az újonnan bevezetett szemléletes technikával— ezekre a gyakorlati járadékfüggvényekre is, s megállapítom, hogy ezek kismértékben, de tartalmazzák a hiperbolikus járadékfüggvények Simonovits által feltárt negatív tulajdonságait. Megmutatom, hogy használva az ezekhez nagyon hasonló, az optimális járadékfüggvény kritériumainak megfelelő függvénycsaládot, ezek a negatív tulajdonságok kiküszöbölhetőek, különösen, ha figyelembe vesszük, hogy a várható élettartam növekedése miatt, a historikus halandósági táblák nem alkalmasak a járadék-kalkulációra, ezek helyett projektáltakat kell alkalmazni. A projekció során viszont könnyen elvégezhető azok szükséges simítása, amivel azok optimális járadékfüggvénnyé tehetők. A tanulmány egyben bemutatja, hogy Simonovits a ,,biztosításmatematikai korrektség" nem szokásos fogalmát használja.

1 Kiindulás

1.1 A kiinduló modell az optimális járadékfüggvény kereséséhez

Az alábbi vizsgálódásommal az optimális járadékfüggvény kereséséhez szeretnék hozzájárulni. A témát Simonovits András vetette fel egy évtizeddel ezelőtt, s elemezte több tanulmányában, azóta. Több lehetséges függvény-,,jelöltről" bizonyította be, hogy az nem tesz eleget az optimális járadékfüggvénnyel szemben támasztott követelményeknek. Kitüntetetten vizsgálta a hiperbolikus járadékfüggvényt, ami a vizsgálatra alkotott modelljéből, mintegy automatikusan következett. Mivel vizsgálatom szorosan kapcsolódik Simonovitséhoz, azt az ő modelljének az ismertetésével kezdem.

[1]A szerző köszönetet mond Kovács Erzsébetnek és Szegő Lászlónak értékes észrevételeikért. Beérkezett: 2011. augusztus 4. E-mail: banyarj@gmail.com.

Simonovits alapmodelljét 2001-ben alkotta meg (Simonovits [2001]), amit —némi finomításokkal— a további tanulmányaiban is alkalmazott. A modellben a következő egyszerűsítő feltételezésekkel él:

- mindenki dolgozik, s mindenki ugyanabban az életkorban kezdi el a munkát (az egyszerűség kedvéért 0 korban)
- egységnyi időre, életkortól függetlenül 1 bért kap (vagyis eltekint a kor szerint növő fizetésektől, a képzettség szerinti fizetési eltérésektől és a reálbér-növekedéstől)
- az egyénnek a kormányzat előírja, hogy évente keresetének hányadrészét tegye félre (vagyis a nyugdíjjárulék τ^*, amire igaz, hogy $0 < \tau^* < 1$), de az egyén dönthet arról, hogy mennyi időt dolgozik, és mennyit tölt nyugdíjban (kötött választás). Erre vonatkozólag csak egyetlen, mesterkélt korlátozás van, ami a modellből következik (ld. alább!): senki sem mehet nyugdíjba a várható átlagos élettartama eltelte után, mert (az alábbi modell szerint) negatív nyugdíjat kapna!
- minden dolgozónak torzítatlan várakozása van saját élettartamáról, jele D. Ez a D élettartam szóródik. Az egyéni várakozások átlaga pedig D^*.
- a biztosításmatematikai korrektség miatt teljesülnie kell, hogy

  $$\tilde{b}(R) \cdot (D^* - R) = \tau^* R \,,$$

  vagyis a kifizetett összes járadéknak egyenlőnek kell lennie a befizetett összes járulékkal. (A $\tilde{b}(R)$ a $b(R)$ általános járadékfüggvény egy konkrét megvalósulása.)
- ennek alapján a kormányzat meghirdeti, hogy ha valaki R évig dolgozik, az a D^* átlagos élettartamra vett

  $$\tau R = b(D - R) \,, \quad 0 < R < D$$

  szerinti nyugdíjat kapja haláláig.
- A modellből következik egy járadékfüggvény, mégpedig az alábbi, az R változó szerint *hiperbolikus függvény:*

  $$\tilde{b}(R) = \frac{\tau^* R}{D^* - R} \,, \quad 0 < R < D^*$$

- ez azt fejezi ki, hogy a törvényhozók azt feltételezik, hogy a különböző életkorban nyugdíjba menőknek a nyugdíjkorhatár-minimum elérésekor a várható élettartamuk azonos.
- A fenti hiperbolikus járadékfüggvény által megvalósított ösztönzést Simonovits ,,tompítatlannak” nevezi, magát a hiperbolikus járadékfüggvényt pedig ,,biztosításmatematikailag tisztességesnek”. Ennek a tompítatlan ösztönzésnek az eredménye, hogy

- valakinek minél hosszabb/rövidebb az élettartama, annál később/hamarabb megy nyugdíjba. Ezen belül a hiperbolikus járadékfüggvény
  1. azoknak kedvez, akik az átlagosnál tovább akarnak dolgozni, mert azok tovább élnek, és emiatt többet nyernek (a biztosításmatematikailag tisztességes rendszerben), mint ami biztosítási alapon indokolható,
  2. túlbünteti azokat, akik az átlagosnál korábban mennek nyugdíjba, mert ők az átlagosnál kevesebb ideig élnek, s emiatt kevesebbet kapnak, mint ami biztosítási alapon indokolható.
- vagyis a hiperbolikus járadékfüggvény által a későbbi nyugdíjba vonulásra bevetett ösztönző túl erős, ami ahhoz vezet, hogy nagyon nagy redisztribúció történik az ex-ante rövidebb élettartamúaktól az ex-ante hosszabb élettartamúak felé.
- összességében a fenti jutalmak és büntetések nem kompenzálják egymást, hanem *a kormányzat ráfizet a rugalmas ösztönzésre.*
- ,,Tehát az állítólagosan tisztességes rendszer a hosszabb életűeknek kedvez, míg a rövidebb életűeket bünteti. ... Ezt a torzítást vélhetőleg tovább fokozza az a tény, hogy a nagyobb keresetűek statisztikailag tovább élnek – és tovább is dolgoznak." Ezt ő ,,anomáliának" (Simonovits [2001] 395. o.) látja.
- emiatt (Simonovits [2001] 403. o.) ,,az úgynevezett biztosításmatematikailag tisztességes megoldás inkonzisztens."
- A fentieket, mint ,,sejtést" megfogalmazók között említi saját magát, már egy korábbi írásában is (Simonovits [1998]). Ebben a tanulmányban a következőképpen fogalmaz: (699-700. o.) ,,Nagyon valószínűnek tartom, hogy azok az emberek, akik tovább akarnak dolgozni, az átlagosnál tovább élnek, és emiatt többet nyernének, mint ami biztosítási alapon indokolható. Hasonló a helyzet, csak éppen fordított előjellel, azok esetében, akik korai nyugdíjazást vesznek igénybe. Kisebb a várható élettartamuk és emiatt többet vesztenének, mint ami akár biztosítási alapon indokolt."

A megoldást (Simonovits [2001] 403. o.) ,,Az információ-gazdaságtanból ismert módon a biztosítás és a hatékonyság összehangolását a kellően *tompított ösztönzés* jelentheti." ,,Tompított ösztönzésről beszélünk, ha 1. a nyugdíj a szolgálati idő nem csökkenő pozitív függvénye: b^* nem csökken; és 2. a nyugdíj kisebb/nagyobb az úgynevezett biztosításmatematikailag tisztességes nyugdíjnál, ha a szolgálati idő nagyobb/kisebb a kormányzati optimumnál." (403. o.)

A Simonovits [2007]-ben megállapítja, hogy a tompítás segíti ugyan az egyensúlyt, de nagyon lerontja az ösztönzést a későbbi nyugdíjba vonulásra, és összességében nem világos, hogy mi lesz annak célszerű mértéke. Vagyis szerinte a túlösztönzés hatalmas, a tompítás ereje korlátozott. Itt két konkrét megoldást említ. Eszerint:

- a lineáris járadékfüggvény (vagyis, ha a járadékfüggvény lineárisan emelkedne a nyugdíjkorhatár emelésével) jobb, mint hiperbolikus, de a problémát nem oldja meg. Számításai szerint ez javítja az eredményeket, a tanulmányban közölt szimuláció ezt mutatja.

- a probléma triviális megoldása, ha a járadékot kisebb járulékkulccsal számolják ki, mint amit befizettek (vagyis annak mértékét általában, kortól függetlenül csökkentik).

1.2 A pénz időértéke, s ami ebből következik – néhány egyszerűsítő feltételezés

A fentiek alapján az is világos, hogy ebben a modellben —egy magából értődő egyszerűsítő feltételezésként— a pénz időértéke állandó. A továbbiakban, elemzésemben én is ezzel az egyszerűsítő feltevéssel élek. Ebből azonban több dolog is következik, amelyeket célszerű expliciten számba venni:

- a különböző időpontbeli pénzeket nem kell (vagy ami ugyanaz: 0%-os kamatlábbal kell) diszkontálni. Ezért például a járadékfüggvény, a járadékkal kapcsolatos aktuáriusi számítások többségétől eltérően nem tartalmaz diszkontálást (illetve 0%-os kamatlábbal történő diszkontálást tartalmaz).

- Emiatt az egyes egyének életpályáján, az általuk különböző időpontokban teljesített befizetéseket, illetve kapott kifizetéseket egyszerűen összeadhatjuk egymással. Így ha például azt vizsgáljuk, hogy az állam ráfizet-e, vagy sem az ösztönzésre egyszerűen úgy lehet megállapítani, hogy a befizetések egyszerű összegét hasonlítjuk a kifizetések egyszerű összegéhez.

Természetesen az egyén számára, szubjektíve különbözhetnek a különböző időpontokban kapott pénzek értékei. Simonovits ezt be is vezeti a modelljébe, mindegyik egyénhez hozzárendel egy hasznossági függvényt, s feltételezi, hogy az alternatívák között ez alapján dönt. Én magam ezt a mozzanatot kihagytam a vizsgálódásból a következő megfontolásból:

- az állam szintjén végzett vizsgálatoknál (s mikor az optimális járadékfüggvényt keressük, akkor ilyet végzünk) mindegy, hogy a különböző időpontokban kapott, illetve adott pénzeket az egyes egyének hogyan értékelik, az állam szempontjából 1 Ft az 1 Ft, akármikor is kerül kifizetésre, illetve akármikor is folyik be (hiszen a pénz időértéke állandó). Vagyis ugyan lehetséges, hogy mondjuk 5 Ft kifizetését szubjektíve valaki 4-nek, vagy 6-nak értékel összesen, attól függően, hogy milyen ütemezésben kapja azt meg, de abból a szempontból, hogy az állam ráfizet-e vagy sem a kifizetésre, mindkét esetben az 5 Ft-ot kell használni.

- természetesen az ösztönzés szempontjából lehet jelentősége annak, hogy valaki szubjektíven hogyan értékeli egy járadékfüggvény kifizetéseit, de a befizetések és kifizetések egyensúlya szempontjából az államnak csak az számít, hogy ő vajon preferálja-e vagy sem az abszolút értékben minél nagyobb kifizetést. Az állam, illetve az egyensúly szempontjából ez a legrosszabb eset, így csak ezt vizsgálom, illetve ezt teszem fel. Ha a legrosszabb esetben is megfelelő eredményre jutok, akkor a többi esettel már nem kell foglalkozni. (Az ösztönzés kérdésével később még foglalkozom.)

2 A hiperbolikus járadékfüggvény hibái

A hiperbolikus járadékfüggvény valóban túlösztönzést, és túlelosztás valósít meg (vagyis nem biztosítja a befizetések és kifizetések közti egyensúlyt és összességében fenntarthatatlanná teszi a nyugdíjrendszert). Ezt —Simonovitsétól eltérő módon (de a lényeget, illetve eredményt tekintve azonosan) szemléltetve— a következő módon lehet megmutatni. Ha a

$$\tilde{b}(R) = \frac{\tau^* R}{D^* - R}\,, \quad 0 < R < D^*$$

járadékfüggvényt helyettesítem a(z ugyanúgy hiperbolikus)

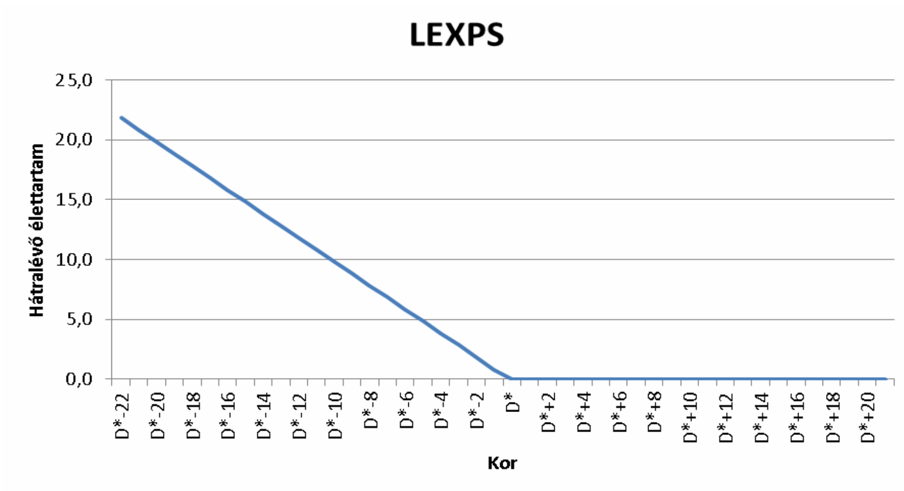
$$\bar{b}(R) = \frac{1}{D^* - R}\,, \quad 0 < R < D^*$$

járadékfüggvénnyel, ahol D^* jelenti (Simonovitssal megegyezően) a születéskor (=munkába álláskor) várható hátralévő élettartamot, R viszont a nyugdíjba vonulási életkort jelenti (szintén Simonovitssal megegyezően, bár ő ezt elsősorban, mint az ezzel amúgy megegyező szolgálati időt tekinti). Mint már jeleztem, e mögött az az implicit feltételezés húzódik meg, hogy:

- minden nyugdíjas azonos korban (D^*) hal meg, vagyis
- sem D^* kor előtt, sem utána nem hal meg senki, vagyis
- a várható hátralévő élettartam függvénye (LEXPS – a végén az S arra utal, hogy ez a ,,Simonovits-féle” hátralévő élettartam függvény) az R szerint lineáris függvény:

$$LEXPS(R) = \begin{cases} D^* - R\,, & \text{ha } 0 < R < D^* \\ 0\,, & \text{ha } R \geq D^*\,. \end{cases}$$

Ez utóbbi állítás, és az az állítás, hogy a járadékfüggvény hiperbolikus, egymással ekvivalens (*1. ábra*).



1. ábra. A hiperbolikus járadékfüggvény várható hátralévő élettartam-függvénye.
Forrás: saját számítás.

Most az a kérdés, hogy ez milyen ösztönzést valósít meg (feltéve, hogy mégsem igaz, amit a kormány feltételez a várható hátralévő élettartamokról, vagyis nem mindenkire érvényes a fenti LEXPS)? A kormányra, illetve a TB egyensúlyára nézve legrosszabb eset, ha

- az egyes nyugdíjasok pontosan ismerik a hátralévő élettartamukat (vagyis haláluk idejét)
- az a céljuk, hogy —a fenti információt kihasználva— maximalizálják a hátralévő élettartamuk alatt kapott összes járadékot.

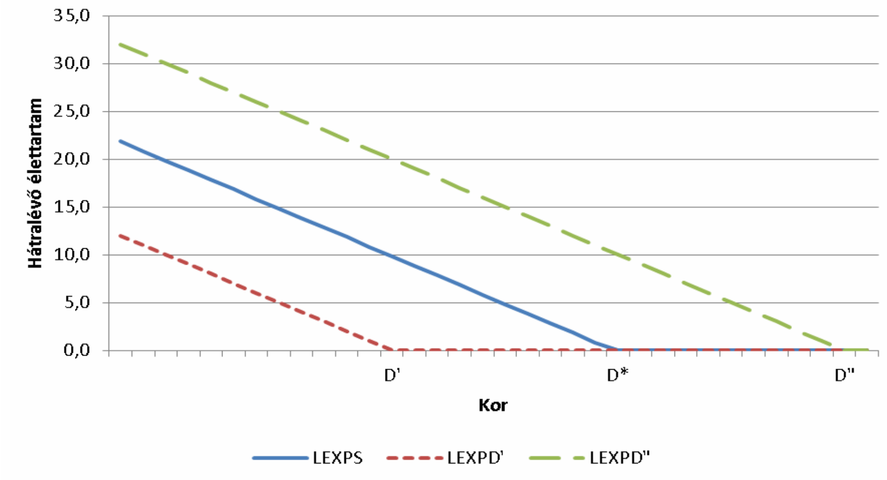
Ez a két feltételezés Simonovits eredeti feltételezéseinek a szélső esete, vagyis ez valósítja meg az általa feltételezett (a TB egyensúlya szempontjából) legrosszabb szcenáriót.

Nézzünk két esetet, az egyikben a nyugdíjas tudja, hogy rövidebb ideig él (mondjuk $D' < D^*$ évig), a másikban pedig tudja, hogy hosszabb ideig (mondjuk $D'' > D^*$ évig), mint a kormányzat által feltételezett átlag. Ekkor az ő személyes várható hátralévő élettartamukat a lehetséges nyugdíjba vonulási korokban a *2. ábra* mutatja (LEXPD'-vel és LEXPD"-vel —általánosan pedig LEXPD-vel— jelölve az egyes eseteket).

Ha feltételezzük, hogy a járadékfüggvény hiperbolikus a LEXPS feltételezései szerint, akkor az egész hátralévő élettartam alatt kapott járadék, 1 egység összegyűjtött tőke esetén[2]:

$$\frac{D-R}{D^*-R} = \frac{LEXPD(R)}{LEXPS(R)} \ .$$

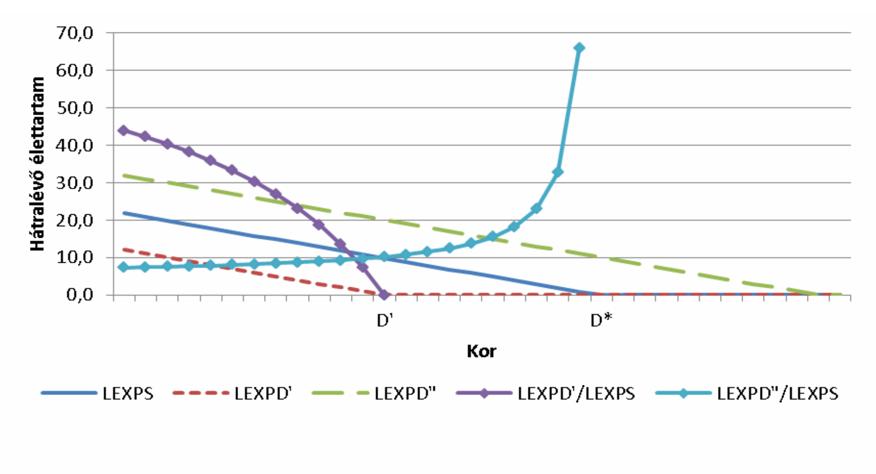
[2]Ezt $\tau^* R$-rel kellene megszorozni, hogy a Simonovits-féle nyugdíjat kapjuk, de az abszolút értékek eltérése nem befolyásolja a görbék egymáshoz viszonyított alakját, ami az elemzés lényege.



2. ábra. A feltételezett társadalmi átlagos és ,,biztos tudáson alapuló" egyéni hátralévő élettartam függvények. *Forrás:* saját számítás.

Vagyis a két konkrét példában a fenti két-két egyenes hányadosát kell maximalizálni. A *3. ábrába* berajzolom (az áttekinthetőség kedvéért némileg felnagyítva) a két-két egyenes hányadosait.

Látszik, hogy aki hosszabb élettartamot vár, mint a ,,hivatalos", annak egyre előnyösebb halasztani, egészen addig, amíg egyáltalán lehetséges, vagyis a ,,hivatalos" élettartamig, aki viszont annál rövidebbet, annak az első lehetséges alkalommal érdemes elmennie nyugdíjba. Aki pontosan D^* élettartamot vár, annak a kapott összjáradék ugyanannyi lesz, bármikor is megy nyugdíjba (természetesen D^* kor előtt, mint mindenki más!).



3. ábra. A hátralévő élettartam függvények és hányadosaik (ezek felnagyítva). *Forrás:* saját számítás.

A D^* kort várók számára ezért a hányados egy egyenes lesz, ami a két fenti görbe közötti átmenetet jelenti. Ezek a megállapítások a középiskolai geometriai tételek (hasonló háromszögek, párhuzamos szelők tétele) alapján egyszerűen beláthatóak.

A hiperbolikus járadékfüggvény tehát nagyon erősen jutalmazza azokat, akik egy ,,hivatalos" élettartamnál többre számítanak, vagyis nagyon erős ösztönzést valósít meg körükben a minél későbbi nyugdíjba vonulásra. Körükben annál jobban jár valaki, minél később vonul nyugdíjba, hiszen itt lényegében az a szabály, hogy valaki akármikor megy is nyugdíjba, de még D^* kor előtt, s megéli ezt a D^* kort, akkor eddig a korig összességében megkapja a teljes addig felhalmozott nyugdíjtőkéjével (a befizetett összes járulékával) megegyező járadékot, s ez után a kor után pedig még évente haláláig egy pluszt, ami (évente!) annál nagyobb, minél később megy valaki nyugdíjba.

Az érintett kör pedig, akinek megéri később nyugdíjba vonulni, nem a nyugdíjasok fele, hanem —a magyar néphalandósági táblák tanulsága alapján— ennél valamivel több. Ilyen feltételek mellett, mondhatni ilyen bikaerős ösztönzés mellett —anélkül, hogy részletesebben utána kellene ennek számolnunk— intuitíve is beláthatjuk, hogy a hiperbolikus járadékfüggvény nagyon erős túlelosztást valósít meg, vagyis több nyugdíjat ad összességében, mint a befizetett járulékok, vagyis ez felborítja a TB nyugdíjkasszát.

3 A biztosításmatematikai korrektség fogalma

Tehát az eddigi elemzés is kimutatta, hogy a hiperbolikus járadékfüggvény a Simonovits által feltárt hibákkal rendelkezik. Mielőtt továbbmennénk azonban, pontosítani szükséges Simonovits egy másik állítását, miszerint a hiperbolikus járadékfüggvény egyben ,,biztosításmatematikailag tisztességes" lenne. (A magam részéről az eredeti angol fogalom, az ,,actuarial fair" egy másik fordítását, a ,,biztosításmatematikailag korrektet" preferálom.) Simonovits ugyanis nem pontosan használja a biztosításmatematikai korrektség fogalmát, s ennek van jelentősége, ugyanis a hiperbolikus járadékfüggvény általa feltárt hibáit általában a biztosításmatematikai korrekt járadékfüggvények hibáinak is tartja. Ugyanakkor ez nem ,,korrekt", mert a hiperbolikus járadékfüggvény nem biztosításmatematikailag korrekt járadékfüggvény.

A biztosításmatematikai korrektséget ugyanis leginkább az aktuáriusok (biztosításmatematikusok) által használt kalkulációs alapelv, az ekvivalencia elv fejezi ki. Eszerint a befizetések jelenértékei várható értékeinek meg kell egyezni a kifizetések jelenértékeinek várható értékével. Másképp: várható értékben meg kell egyezni az ügyfél befizetéseinek és kifizetéseinek.

Az ekvivalencia elv alkalmazható az egyes biztosítottakra, s a biztosítottak egy csoportjára is, ami akár az (adott típusú biztosításon belüli) összes biztosítottat is jelentheti. A gyakorlati lehetőségek döntik el, hogy milyen kicsi csoportra alkalmazzák. Ez úgy jelenik meg, hogy mennyire tesznek különbséget a biztosítottak egyes csoportjai között. Lényegében minél inkább, annál inkább lehet a kalkulációt biztosításmatematikailag korrektnek nevezni.

Simonovits egy olyan példát hoz, ahol a ,,kalkulációkor" irreális feltevésből indulnak ki, de ezen feltevés mellett teljesül az ekvivalencia elv, tehát a befizetések (a nyugdíjazásig befizetett összes járulék) megegyeznek a kifizetésekkel (a halálozásig várható összes nyugdíjjal). Az irreális feltevés, hogy mindenki ugyanabban a korban hal meg. Erről azonban mindenki tudja, hogy nem igaz, s ilyen feltevést biztosításmatematikus kalkulációkor sohasem tesz. Ehelyett abból a közismert gyakorlati megfigyelésből indulnak ki, hogy valaki minél tovább élt már eddig, annál nagyobb lesz a várható összes élettartama (vagyis annál magasabb korban hal meg).

Ez egyszerűen abból következik, hogy az x évesek várható élettartamába beleszámítják azoknak az élettartamát is, akik abban az évben meghalnak, míg az $x + 1$ évesek élettartamába már —értelemszerűen— nem, s pont ők húzták le az x évesek várható élettartamát. Tehát a kor előrehaladtával mindenkinek a várható összes élettartama (vagyis az aktuális kora, s az abban a korban várható hátralévő élettartam összege) automatikusan magasabb lesz, akár számít erre, s ez alapján cselekszik (mint Simonovitsnál is), akár nem. A gyakorlatban, a nyugdíjjáradék-biztosításra konkretizálva ez azt jelenti, hogy minél később megy valaki nyugdíjba, egyre több évre kell elosztani az összegyűjtött járulékát ahhoz képest, mint amennyi abban a korban még a születéskor (vagy munkába álláskor) átlagos hátralévő élettartamból még hátra van. Ha kalkulációkor ezt az egyszerű tényt nem veszik figyelembe (márpedig a hiperbolikus járadékfüggvény pont ennek a figyelmen kívül hagyását jelenti), akkor azt a kalkulációt nem lehet biztosításmatematikailag korrektnek nevezni.

Azt, hogy a hiperbolikus járadékfüggvény biztosításmatematikailag nem korrekt, egyszerűen is láthatjuk, hiszen itt azért sem teljesül a befizetett járulékok és a kapott járadékok várható egyenlősége, mert aki D^* kornál tovább él, az *biztosan* (tehát nem várhatóan!) többet kap, mint amit befizetett. A biztosításmatematikailag korrekt kalkuláció esetén nincs ilyen bizonyosság, itt egy jóval szűkebb kör kap többet a befizetéseinél: azok, akik tovább élnek annál, ami a nyugdíjba vonulási koruk esetén a várható hátralévő élettartam.

Mindezekből az következik, hogy a megoldást, vagyis a megfelelő járadékfüggvényt nyugodtan kereshetjük a biztosításmatematikailag korrekt járadékfüggvények között, s az alábbiakban ezt is teszem. Fel kell viszont oldani azt a feltevést, hogy minden korban megegyezik (állandó) a kor plusz abban a korban várható hátralévő élettartam, s ehelyett a kor plusz abban a korban várható élettartamra a kor függvényében növekvő függvényt kell feltételezni.

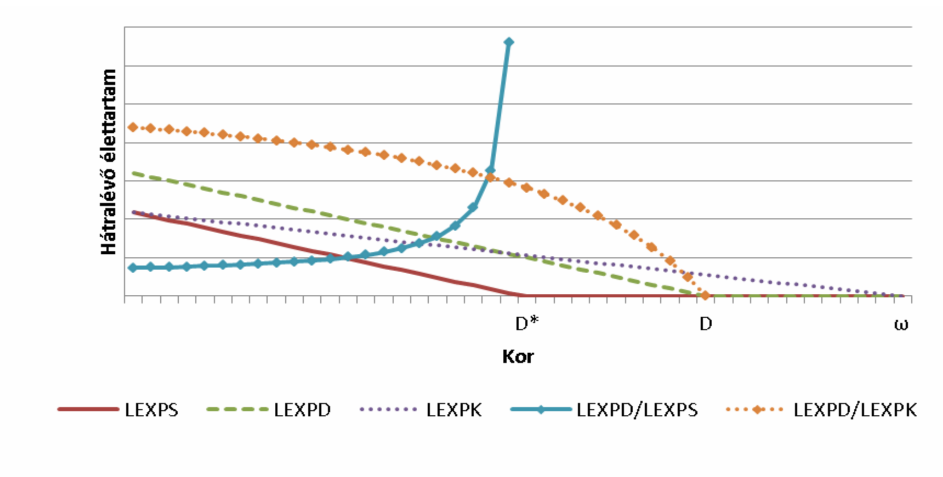
Az alábbiakban ilyen függvényt keresek, s ezt jól meg is alapozza az, hogy a hiperbolikus járadékfüggvény hibáinak bemutatásában Simonovitsétól eltérő gondolatmenetet használtam.

4 Egy analitikusan jól viselkedő, releváns függvényosztály

Az általam használt gondolatmenetben a fő eltérés Simonovitstól az volt, hogy én nem közvetlenül a járadékfüggvényt, hanem (az aktuáriusoknál szokásos módon) annak reciprokát, a „járadékosztót” (annuity divisor) próbáltam megragadni. Ez a járadék-osztó 0%-os diszkontrátánál (amit ebben a tanulmányban végig feltételezek – ld. fent!) megegyezik a várható hátralévő élettartammal a LEXP függvénnyel. Mint megmutatom, analitikusan jól viselkedő (releváns) LEXP függvényt sokkal könnyebb konstruálni, mint annak reciprokát, a járadékfüggvényt.

Kezdhetjük mindjárt a legkézenfekvőbb jelölttel, a lineáris LEXP függvénnyel! Ez nem vezet túlösztönzésre, amint azt az alábbi ábra mutatja. Legyen ez az alábbi ábrában a LEXPK (a K a „konstruáltra” utal) egy olyan lineáris függvény, ami ω kornál (a szokásos jelölés a megfigyelt legmagasabb életkorra) éri el a 0-t. (Ez a függvény természetes módon teljesíti az előbbi követelményünket, hogy a kor + abban a korban várható hátralévő élettartam növekvő legyen, egyszerűen azzal, hogy nem olyan meredek, mint a Simonovits-féle – (-1) meredekségű – LEXPS függvény.) Ekkor az ösztönzést a *4. ábra* mutatja egy tetszőleges $D < \omega$ várható élettartamnál, ahol feltesszük, hogy valaki pontosan ismeri magára vonatkozólag ezt a D értéket:

Az ábrából látszik, hogy a Simonovits-féle LEXPS alkalmazása esetén, ha valaki tudja, hogy tovább él, mint D^*, akkor a lehető legkésőbbi időpontban (D^*-ban) kell nyugdíjba vonulnia, ha maximalizálni akarja az össznyugdíját. Ezzel szemben egy lineáris LEXPK alkalmazása esetén bármeddig él is valaki, a leginkább az éri meg neki, ha az első lehetséges alkalommal nyugdíjba vonul – megint csak: ha célja az, hogy a kapott össznyugdíját maximalizálja.



4. ábra. A hiperbolikus járadékfüggvény és a lineáris várható hátralévő élettartamon alapuló járadékfüggvény összehasonlítása. *Forrás:* saját számítás.

Vagyis egy ilyen LEXP (=inverz járadékfüggvény) nem alkalmaz túlösztönzést. Emiatt túlelosztást sem valósíthat meg, hiszen ha valaki később megy nyugdíjba, akkor minden esetben csökken a kapott össznyugdíj (változatlan tőkét feltételezve, vagyis az össznyugdíj kisebb mértékben nő, mint amilyen mértékben a további munkavállalás miatt a befizetett összjáradék). Vagyis, ha a nyugdíjba vonulási kornál jól volt kiszámítva a járadék (tehát a rendszer egyensúlyban volt), akkor a későbbi nyugdíjba vonulás miatt ez az egyensúly nem romlik!

Összességében találtunk egy analitikusan jól viselkedő függvényt, ami biztosítja a fenntarthatóságot, és elkerüli a túlösztönzést. Ráadásul ez még eléggé realisztikus is, hiszen tudjuk, hogy a realisztikus LEXP-nek monoton kell csökkennie egészen 0-ig, amit csak ω-nál ér el (akkor viszont eléri azt). Ezt a feltételt pedig a fenti, lineáris LEXPK teljesíti (a LEXPS pedig nem).

A LEXPK-ból kiindulva viszont —bizonyos mértékig azt általánosítva— találunk egy egész függvényosztályt, amelyre szintén igaz, hogy:

1. az előbbi értelemben realisztikus LEXP-ket adnak,
2. a reciprokukként előálló járadékfüggvény elkerüli a túlösztönzést – vagyis a kor növekedésével egyre kisebb összjáradékot szolgáltat.

Ez a függvényosztály a

$$LEXP(R) = \frac{D^*}{\omega^n} \cdot (\omega - R)^n \ ,$$

aminek speciális esete az $n = 1$, vagyis a lineáris LEXP függvény, a fenti LEXPK. Az n egyfajta „intuitív” paraméter, azt biztosítja, hogy lineáristól eltérő eseteket is vizsgálhassunk. Ekkor $R = 0$ életkornál a várható hátralévő élettartam D^* (egyezően az induló modell feltételezésével), $R = \omega$-nál pedig 0. A függvények alakjáról, ami nyilván n függvényében változik, az *5. ábra* ad képet. A kép alapján látszik, hogy —szemben a lineáris esettel— $n \neq 1$ esetén már nem magától értetődő, hogy a nyugdíjba vonulási kor növekedésével itt is csökken a kifizetett összjáradék, természetesen most is egységnyi megtakarításra. Emiatt ezt analitikusan bizonyítom be, illetve analitikusan keresem azt a feltételt n-re, amikor még ez a csökkenés igaz lesz. Vagyis az a kérdés, hogy a

$$\frac{D - R}{\frac{D^*}{\omega^n}(\omega - R)^n}$$

függvény csökkenő-e, vagyis, hogy a deriváltja negatív-e? A függvény azt mutatja, hogy, ha valaki tudja, hogy $D \le \omega$ életkorig fog élni, akkor menynyi várható össznyugdíja az R nyugdíjba vonulási kor függvényében, feltéve természetesen, hogy egyáltalán megéri a nyugdíjkorhatárt R $(< D)$, és, hogy egységnyi tőkét halmozott fel. Ahhoz, hogy megtudjuk, hogy a fenti függvény az R csökkenő függvénye-e, azt R szerint deriválni kell. A derivált

$$\frac{-(\omega - R) + n \cdot (D - R)}{\frac{D^*}{\omega^n}(\omega - R)^{n+1}} \ .$$

Az adott feltételek mellett ennek nevezője mindig pozitív, vagyis a tört akkor negatív, ha a számlálója negatív:

$$-(\omega - R) + n(D - R) < 0 \ .$$

Ezt n-re megoldva:

$$n < \frac{\omega - R}{D - R}$$

a feltétele a derivált negativitásának. Mivel ennek R-szerinti deriváltja

$$\frac{\omega - D}{(D - R)^2} > 0 \ ,$$

ezért ez monoton növekvő függvény, vagyis a legkisebb értékét $R = 0$-nál veszi fel (ennél kisebb nyugdíjba vonulási kort nem tudunk elképzelni). Tehát ha $R = 0$-nál igaz lesz az összefüggés, akkor a derivált minden R-re negatív lesz, vagyis teljesülnie kell a

$$n < \frac{\omega}{D}$$

egyenlőtlenségnek. Viszont minden, ennek az egyenlőtlenségnek megfelelő n-re egy, a nyugdíjba vonulási korra monoton csökkenő össznyugdíjat produkáló, analitikusan jól viselkedő LEXP függvényt kapunk. Az n konkrét értéke függ a várt élettartamtól, de mivel $\omega \geq D$ minden élettartamra, ezért ezek között a függvények között mindig szerepel a lineáris LEXP függvény is.

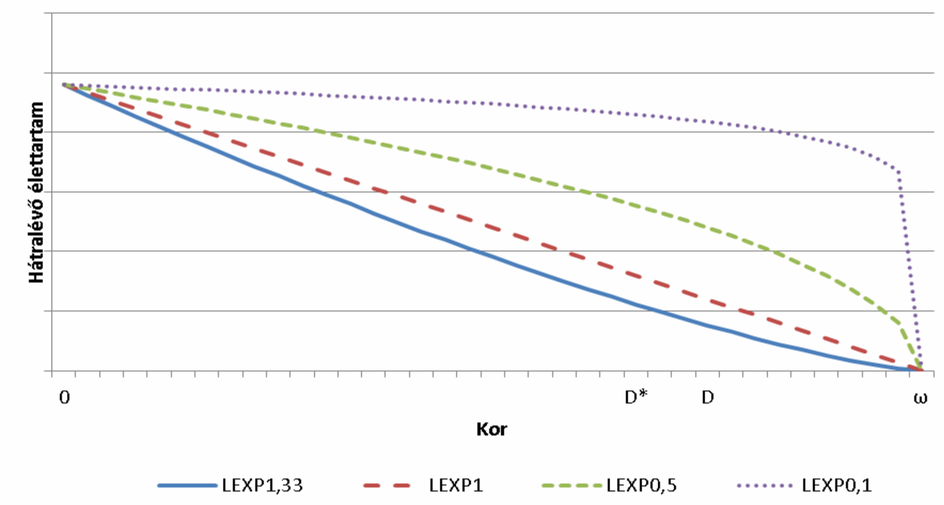
Az érdekesség kedvéért nézzük meg ezeknek a függvényeknek az alakját például a $D = (\omega + 3D^*)/4$ értékre, és tegyük fel[3], hogy $D^* = 2/3\omega$. Ekkor n-re teljesülnie kell, hogy

$$n < \frac{\omega}{D} = \frac{\omega}{(\omega + 3D^*)/4} = \frac{4 \cdot \omega}{\omega + 3 \cdot 2/3 \cdot \omega} = \frac{4}{3} \ .$$

$n = 1{,}25$ még biztos eleget tesz ennek, ezért megnézhetjük a függvények alakját ennél nagyobb és kisebb értékekre, például legyen $n = 1{,}33$, $n = 1$, $n = 0{,}5$ és $n = 0{,}1$ (*5. ábra*).

Tehát az analitikusan jól viselkedő, releváns LEXP függvényosztály, amely nem okoz túlösztönzést és túlelosztást, az egyenes körül helyezkedik el felfele is és lefele is, bár lefele erősen korlátozott, hogy meddig terjedhet. Mint alább látni fogjuk, pont ez a lefele eltérő (viszont korlátozott) függvényhalmaz fog leginkább hasonlítani a ténylegesen megfigyelt LEXP értékekhez.

[3]Vagyis a születéskor várható élettartam a maximális lehetséges kétharmada (Magyarországon pl. a szokásos $\omega = 100$ esetében ez 66,7 évet jelent, ami közel van a férfiak '90-es években megfigyelt születéskori várható hátralévő élettartamához. D pedig így a D^* és az ω olyan lineáris kombinációja, ami közelebb van a várható élettartamhoz.



5. ábra. A lineáris várható hátralévő élettartam függvényből általánosított, konstruált hátralévő élettartam függvény-osztály. *Forrás:* saját számítás.

Ezt a releváns függvényosztályt az előbbiekhez képest még lehet bővíteni, úgy, hogy a D^*-nak nem szükséges azt az értéket adni, amit Simonovits adott neki, vagyis nem szükséges, hogy az a születéskor várható hátralévő élettartam legyen. Adhatjuk annak például a nyugdíjba vonuláskor érvényes hátralévő élettartam értéket is, s ezzel bővítettük a függvényosztályt. Ekkor a függvényosztály a következőképpen módosul:

$$LEXP(R) = \frac{D^*}{(\omega - R^*)^n} \cdot (\omega - R)^n ,$$

ahol R^* a hivatalos nyugdíjkorhatár (elvileg ez előtt nem lehet nyugdíjba menni) és D^* ekkor az ehhez tartozó várható hátralévő élettartam. Ekkor a várható össznyugdíj D várható életkor esetén, R tényleges nyugdíjba vonulási kor esetén:

$$\frac{D - R}{\frac{D^*}{(\omega - R^*)^n} \cdot (\omega - R)^n} .$$

Ennek deriváltja:

$$\frac{-(\omega - R) + n \cdot (D - R)}{\frac{D^*}{(\omega - R^*)^n} \cdot (\omega - R)^{n+1}}$$

negatív, ha teljesül, hogy

$$-(\omega - R) + n \cdot (D - R) < 0 .$$

Vagyis

$$n < \frac{\omega - R^*}{D - R^*} .$$

5 Az eredmény elemzése, további problémák

Bizonyos szempontból itt befejezhetnénk az elemzésünket, hiszen találtunk egy túlösztönzésre nem bíztató, releváns függvényosztályt a járadékokra. Azonban az eredménnyel kapcsolatosan logikusan vetődnek fel további kérdések:

1. Hogyan viszonyul egymáshoz a gyakorlatban alkalmazott járadékfüggvény, és a fenti függvényosztály? Elkerüli a gyakorlati járadékfüggvény is a túlelosztást?

2. Ha nem, akkor mit lehet tenni?

3. Megfelelően ösztönöznek a „javított” járadékfüggvények?

Az alábbiakban ezeket a kérdéseket vizsgálom meg egyenként.

5.1 A gyakorlati és a konstruált járadékfüggvény összehasonlítása

A gyakorlatban a járadékfüggvényeket a megfigyelt halandósági táblával számolják ki, vagyis járadékosztóként a megfigyelt várható hátralévő időtartamokat használják. Felvetődik egyrészt, hogy ezek hasonlítanak-e, illetve mennyire hasonlítanak a mi konstruált várható hátralévő időtartam függvényeinkhez, másrészt pedig, hogy a megfigyelt halandósági táblával számolt járadékfüggvény mentes-e, vagy sem a Simonovits által feltárt hibától?

Nézzük először az első kérdést. Ez lényegében azt jelenti, hogy a

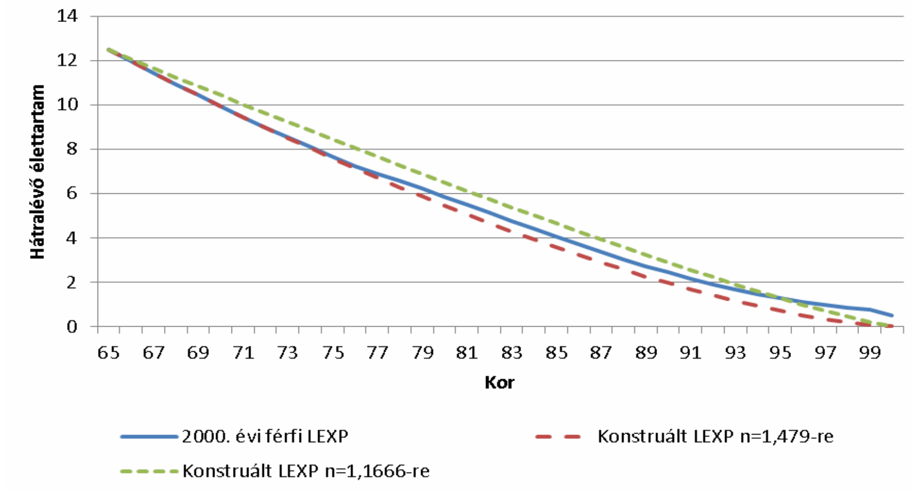
$$\frac{D-R}{\frac{D^*}{\omega^n}\cdot(\omega-R)^n}$$

függvény hasonlít-e a konkrét LEXP függvényekhez? A dolog természetéből adódóan ezt csak példálódzva tudjuk bemutatni. Vegyük például a 2000. év magyar férfi néphalandósági táblája alapján számított LEXP értékeket. Ez a *6. ábrán* látható görbe, a hivatalos, $R^* = 65$ éves életkortól számítva (az ábrába két másik, konstruált LEXP-t is berajzoltunk, ezekről alább).

Ekkor egyébként $R^* = 65$-nél $D^* = 12{,}49$. Néhány próbálgatással kiderül, hogy ha $n > 1{,}478$, akkor a

$$LEXP(R) = \frac{D^*}{(\omega-R^*)^n}(\omega-R)^n$$

görbe ($\omega = 100$) mindig ez alatt a tényleges LEXP görbe alatt lesz.



6. ábra. A konstruált és a megfigyelt hátralévő élettartam függvények. *Forrás:* saját számítás.

Ha az

$$n < \frac{\omega - R^*}{D_0 - R^*}$$

egyenlőtlenséget most „visszafele” megoldjuk D-re $n = 1{,}479$ értékre, akkor azt kapjuk, hogy

$$1{,}479 = \frac{100-65}{D-65} \quad \to \quad D = \frac{35}{1{,}479} + 65 = 88{,}66\ .$$

Ha most „rendesen” $D = 95$-re is megoldjuk, akkor kapjuk, hogy

$$n = \frac{100-65}{95-65} = 1{,}16\ .$$

Mindkét konstruált LEXP-t berajzoltuk a 6. ábrába. Látjuk, hogy megfelelő n érték esetén a konstruált LEXP értékek a megfigyelt LEXP-hez nagyon hasonló görbét adnak. Ugyanakkor a görbék nem „simulnak” teljesen össze, főleg a magas élettartamoknál tér el a megfigyelt és a konstruált LEXP függvény.

Ha áttérünk a második kérdésre, akkor a fenti ábrán a megfigyelt és a konstruált LEXP görbe metszéspontját úgy is interpretálhatjuk, hogy ha valaki a hivatalos nyugdíjba vonulási korban várható 12,49 évnél hosszabb, de 23,66 évnél rövidebb élettartamra számít, akkor —ha a járadékokat a tapasztalati LEXP-el számolják ki— nem éri meg neki csak azért elhalasztani a nyugdíjba vonulást, hogy összességében több nyugdíjat kapjon. Ekkor ugyanis nem fog többet kapni. Ha ellenben ennél hosszabb élettartamra számít, akkor előfordulhat, hogy halasztás esetén némileg magasabb lesz a nyugdíja. Nézzünk erre néhány konkrét számítást az *1. táblázatban.*

Kor	Hátralévő élettartam (elhalálozási korban)													
	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
65	1,76	1,84	1,92	2,00	2,08	2,16	2,24	2,32	2,40	2,48	2,56	2,64	2,72	2,80
66	1,76	1,84	1,92	2,01	2,09	2,17	2,26	2,34	2,42	2,51	2,59	2,67	2,76	2,84
67	1,75	1,83	1,92	2,01	2,10	2,18	2,27	2,36	2,45	2,53	2,62	2,71	2,80	2,88
68	1,74	1,83	1,92	2,01	2,10	2,19	2,29	2,38	2,47	2,56	2,65	2,74	2,83	2,93
69	1,72	1,82	1,92	2,01	2,11	2,20	2,30	2,40	2,49	2,59	2,68	2,78	2,87	2,97
70	1,71	1,81	1,91	2,01	2,11	2,21	2,31	2,41	2,51	2,62	2,72	2,82	2,92	3,02
71	1,69	1,80	1,90	2,01	2,12	2,22	2,33	2,43	2,54	2,64	2,75	2,86	2,96	3,07
72	1,67	1,78	1,89	2,00	2,12	2,23	2,34	2,45	2,56	2,67	2,78	2,89	3,01	3,12
73	1,64	1,76	1,88	1,99	2,11	2,23	2,35	2,46	2,58	2,70	2,82	2,93	3,05	3,17
74	1,61	1,73	1,86	1,98	2,10	2,23	2,35	2,47	2,60	2,72	2,85	2,97	3,09	3,22
75	1,57	1,70	1,83	1,96	2,09	2,22	2,35	2,48	2,61	2,74	2,88	3,01	3,14	3,27
76	1,52	1,66	1,80	1,93	2,07	2,21	2,35	2,49	2,63	2,76	2,90	3,04	3,18	3,32
77	1,45	1,59	1,74	1,88	2,03	2,17	2,32	2,46	2,61	2,75	2,90	3,04	3,19	3,33
78	1,37	1,52	1,68	1,83	1,98	2,13	2,29	2,44	2,59	2,74	2,90	3,05	3,20	3,35
79	1,29	1,45	1,61	1,77	1,93	2,09	2,26	2,42	2,58	2,74	2,90	3,06	3,22	3,38
80	1,20	1,37	1,54	1,71	1,88	2,05	2,22	2,39	2,56	2,73	2,91	3,08	3,25	3,42
81	1,09	1,28	1,46	1,64	1,82	2,00	2,19	2,37	2,55	2,73	2,91	3,10	3,28	3,46
82	0,98	1,17	1,37	1,56	1,76	1,95	2,15	2,34	2,54	2,73	2,93	3,12	3,32	3,51
83	0,84	1,05	1,26	1,47	1,68	1,89	2,10	2,31	2,52	2,73	2,94	3,15	3,36	3,57
84	0,68	0,91	1,14	1,36	1,59	1,82	2,05	2,27	2,50	2,73	2,96	3,18	3,41	3,64
85	0,50	0,74	0,99	1,24	1,48	1,73	1,98	2,23	2,47	2,72	2,97	3,22	3,46	3,71
86	0,27	0,54	0,81	1,08	1,35	1,62	1,90	2,17	2,44	2,71	2,98	3,25	3,52	3,79
87	0,00	0,30	0,60	0,89	1,19	1,49	1,79	2,09	2,38	2,68	2,98	3,28	3,58	3,87
88		0,00	0,33	0,66	0,99	1,32	1,65	1,98	2,31	2,64	2,97	3,30	3,63	3,96
89			0,00	0,37	0,74	1,10	1,47	1,84	2,20	2,57	2,94	3,31	3,67	4,04
90				0,00	0,41	0,82	1,23	1,65	2,06	2,47	2,88	3,29	3,70	4,11
$^{a)}$	-2,9	-1,7	-0,6	0,5	1,4	2,3	3,2	3,9	4,7	5,3	6,0	6,6	7,1	7,7
$^{b)}$	-11,0	-7,8	-4,8	-2,1	0,4	2,7	4,9	6,9	8,8	10,5	12,2	13,7	15,2	16,6
$^{c)}$			0,0	0,5	1,6	3,1	4,9	7,1	9,3	11,3	16,3	25,1	36,0	46,8
$^{d)}$		2,5	2,3	2,0	1,7	1,4	1,1	0,8	0,6	0,3	0,2	0,1	0,0	0,0

$^{a)}$Nyereség 70 évnél (%) $^{b)}$Nyereség 75 évnél (%) $^{c)}$Maximális nyereség (%)
$^{d)}$A nyugdíjas népesség %-a, aki ennyi idős korban megy nyugdíjba

1. táblázat. Az össznyugdíj 1 Ft tőkére különböző nyugdíjba vonulási korok esetén. *Forrás:* saját számítás, KSH

A 2000-es magyar férfi néphalandósági tábla szerint 88,66 éves korig (tehát akik maximum ilyen hosszú élettartamot várnak) senkinek nem éri meg elhalasztani a nyugdíjba vonulást. Ez látszik is a fenti, 87 éves korban induló táblázaton, hiszen 87 és 88 éves korban is (vagyis azoknál, akik ennyi éves korig élnek, s ezt tudják is magukról) akkor kapják a maximális össznyugdíjat, ha a hivatalos nyugdíjba vonulási kornál (65 évnél) mennek nyugdíjba. A maximális össznyugdíjat az áttekinthetőség kedvéért aláhúzással jelöltem. (Ez a táblázatban nem szereplő, 87 évnél kisebb várható életkoroknál is 65 évnél van.) Látszik, hogy például, aki 93 éves korig „tervezi" életben maradni (az átlagos 77,49 év helyett), annak 75 éves korban érdemes nyugdíjba vonulnia, s ezért egész életében összesen 4,9%-kal többet fog kapni, mintha már 65 éves korban nyugdíjba menne. Ez viszont csak a 65 évet megéltek (vagyis a nyugdíjba vonulók) 1,1%-ára vonatkozik. Jóval többet nyer az a 6 fő, aki 100 éves maximális kort remél, 46,8%-ot nyernek, de ehhez 90 éves korban kell nyugdíjba vonulniuk. Ha ezt nem tudják kivárni, s már 75 éves korban nyugdíjba mennek, akkor nyereségük csak 16,6%.

Látható, hogy a nyugdíjba vonulók 86,8%-ának a legjobb döntés, ha azonnal nyugdíjba vonulnak, amint az lehetséges, s csak a maradék 13,2%-nak éri meg később nyugdíjba vonulni. Többségüknek azonban a nyeresége csekély. Ráadásul, egyáltalán nem biztos, hogy valaki csak azért vár 87 éves koráig a nyugdíjjal, hogy a maximális 25,1%-os többletet „tegye zsebre". Lehet, hogy neki megéri a 6%-os nyereség 70 évnél, ami viszont már nagyon csekély hatással van az egyensúlyra.

Összességében tehát azt mondhatjuk, hogy a megfigyelt halandósági tábla felhasználásával készült járadékfüggvény esetében is ki lehet mutatni a hiperbolikus járadékfüggvénynél feltárt problémákat, viszont nagyon erősen korlátozott körben. Ugyanakkor ez a „hiba" lehet egy ok arra, hogy a tényleges járadékkalkulációban ne ezeket a várható hátralévő élettartamokat használják. Ugyanakkor erre van más ok is.

5.2 A gyakorlati járadékfüggvény hibái és lehetséges kijavításuk

A megfigyelt halandósági táblával számolt járadékfüggvénnyel vannak más gondok is, nevezetesen kettő:

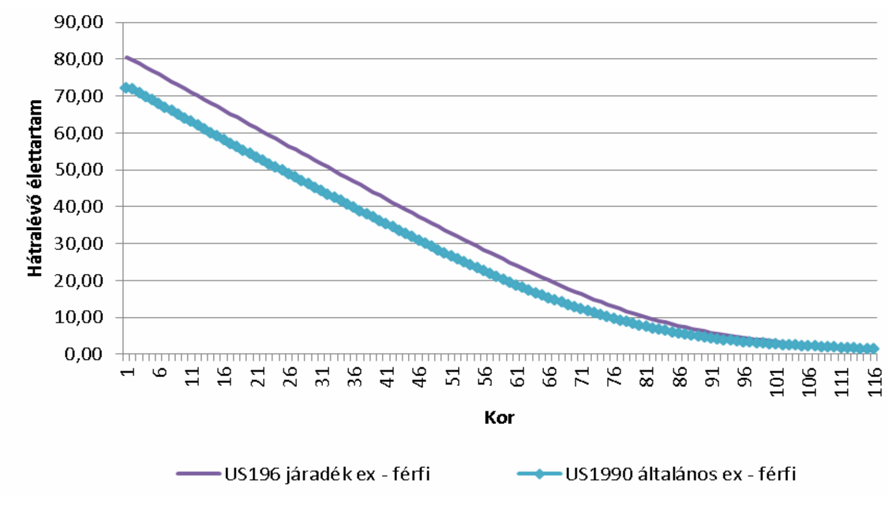
1. A kormányzati hivatalos LEXP adatok aktuálisan megfigyelt, vagyis „historikus" adatok. Olyan emberek halálozási valószínűségeiből állították össze őket, akik már meghaltak, miközben olyan emberekre kell ezeket alkalmazni, akik még élnek. Ha a várható hátralévő élettartam stacionér lenne, akkor ezzel nem lenne semmi baj, de tudjuk, hogy az a fejlett világban (s most már Magyarországon is) már évtizedek óta dinamikusan változik, alapvetően nő. Így ha aktuáriusilag korrekt járadékfüggvényt akarunk használni, akkor projektált, s nem megfigyelt várható hátralévő élettartammal kell dolgozni.

   Példaként álljon itt egy amerikai példa a néphalandósági és a járadék célból projektált várható hátralévő élettartamok különbségére (*7. ábra*). A projekció módszertana ismert, s a kormányhivatalok több-kevesebb rendszerességgel adnak is közzé minden országban projektált halandósági táblákat. Ráadásul semmi akadálya nincs, hogy a projektált halandósági táblákat (várható hátralévő élettartamokat) a fenti függvényekkel úgy „simítsák", hogy elvileg is kiküszöböljük belőlük a túlösztönzést. Beépített problémája azonban a projekciónak, hogy arról csak utólag derül ki, hogy jó volt-e.

2. A másik probléma, hogy nem világos, hogy a LEXP milyen rétegre vonatkozik. A statisztikákat általában az egész ország népességére, férfi-nő bontásban szokták megadni. Ugyanakkor az ország egészének a népessége és a nyugdíjas népesség nem teljesen egyforma halandósági

jellemzőkkel bír. A nyugdíjas népességen belül is vannak különböző halandóságú alcsoportok, hiszen a végzettség, lakóhely, munkahely/munkakör, fizetés, stb. erős korrelációt mutat az élettartammal. Indokolt lenne ezért az egész lakosságra vonatkozó, csak kor szerint differenciált halandósági táblák helyett más jellemzők szerint is differenciált táblákat alkalmazni, hogy méltányosabb legyen a járadék. Az aktuáriusi korrektség fogalmába a differenciálás is beletartozik. Úgy tűnik azonban, hogy a politika akadálya a differenciálásnak. Újabban még a korábban szokásos férfi és nő szerinti differenciálást is tiltják[4], s további, más tényezők szerinti differenciálásról szó sem lehet.

Összességében azonban megállapítható, hogy lehetséges megfelelően kisimított, projektált halandósági tábla készítése, amivel túlösztönzéstől mentes és biztosításmatematikailag korrekt járadékfüggvényeket készíthetünk. Ráadásul úgy tűnik, hogy ha a ,,simítatlan" adatokat alkalmazzuk, a túlösztönzés hatóköre akkor is erősen korlátozott. Ugyanakkor a simítást az is indokolja, hogy tudjuk, hogy a néphalandósági táblában a 85 éves kor feletti korokra (tehát pont azokra a korokra, ahol a túlösztönzés fent előfordult) vonatkozó értékeket már eleve nagyvonalúan, erőteljes matematikai ,,simítással" számítják, vagyis már az sem a tényleges, pontos érték. Tehát ha már úgyis simítanak, akkor azt a fenti probléma figyelembe vételével célszerű megtenni.



7. ábra. Az 1990-es amerikai férfi néphalandósági táblából számolt és az 1996-os projektált férfi várható hátralévő élettartam függvények. *Forrás:* U.S. Department of Health and Human Services, NAIC.

[4] Az életbiztosításban, vagyis a piaci járadékok vonatkozásában. A TB járadékok esetében a nemek szerinti differenciálás eleve nem volt szokásban.

5.3 A biztosításmatematikailag korrekt kalkuláció ösztönző hatása

A fentiek alapján a biztosításmatematikailag korrekt járadékfüggvény esetében —mint láttuk— szinte mindig (vagyis a nyugdíj előtt állók túlnyomó többsége számára) az a célszerű, ha valaki minél korábban megy nyugdíjba, vagyis az nem tartalmaz túlösztönzést. Tehát az eleget tesz a Simonovits-féle ,,tompított ösztönzés" követelményének, vagyis a nyugdíj nő a nyugdíjba vonulási korral, de (messze!) nem annyira, mint amit a hiperbolikus járadékfüggvény adna. Ezzel ráadásul egyfajta ,,természetes" módon megválaszoltuk Simonovitsnak azt a kérdését is, hogy mi legyen a tompítás mértéke.

A ,,tompítás" viszont Simonovits szerint ,,lerontja az ösztönzést". Valóban, mivel a biztosításmatematikailag korrekt járadékfüggvény szinte mindig kisebb össznyugdíjat ad a később nyugdíjba vonulóknak, mint akik az első adandó alkalommal nyugdíjba vonulnak, ez egyáltalán nem ösztönöz a későbbi nyugdíjba vonulásra. Vagyis az aktuáriusilag korrekt járadékfüggvény ,,csak" korrektebbé teszi a nyugdíjrendszert azokkal szemben, akik maguktól is tovább dolgoznának. Ilyen emberek vannak, emiatt szerintem nem úgy kell feltenni a kérdést, hogy hogyan ösztönözzük az embereket a továbbdolgozásra, hanem, hogy hogyan kell eltávolítani azokat az ellenösztönzőket, amelyek ettől a szándékuktól eltántorítják. Ha ugyanis a korábban nyugdíjba menők aránytalanul jól járnak, akkor —bármennyire is szeretnének néhányan tovább dolgozni— mindenki inkább a korai nyugdíjba vonulást (vagyis az első lehetséges alkalmat) választja. Tehát a biztosításmatematikailag korrekt járadékfüggvény valójában nem ösztönöz a továbbdolgozásra, hanem egyszerűen azzal, hogy korrektül jár el, megszünteti a további munkavállalással szembeni ellenösztönzést.

Irodalom

1. Banyár József [2003]: *Életbiztosítás*. Budapest, Aula.
2. Banyár József – Mészáros József [2003]: *Egy lehetséges és kívánatos nyugdíjrendszer*, Budapest, Gondolat.
3. Banyár József [2007]: A kötelező életjáradék lehetséges működése és szabályozása, in: Banyár József – Gál Róbert Iván – Mészáros József: *Van megoldás – nyugdíjreform*, Budapest, Barankovics István Alapítvány. 254–371. o.
4. Banyár József – Gál Róbert Iván – Mészáros József [2010]: A névleges egyéni számlás rendszer, in: *Jelentés a Nyugdíj és Időskor Kerekasztal tevékenységéről.*
5. Banyár József [2012]: *A kötelező öregségi életjáradékok lehetséges modelljei*, Budapest, Gondolat.
6. Simonovits András [1998]: Az új magyar nyugdíjrendszer és problémái. *Közgazdasági Szemle*, 45. 7-8. 689–708. o.
7. Simonovits András [2001]: Szolgálati idő, szabadidő és nyugdíj – ösztönzés korlátokkal. *Közgazdasági Szemle*, 48. 5. 393–408. o.
8. Simonovits András [2007]: Improving on the Notional Defined Benefit, kézirat (publikálva Marin, B., Zaidi, A., Lipszyc and Makovec, M. (2008): *Mainstreaming Ageing: Indicators to Monitor Sustainable Progress and Policies*, Ashgate. pp. 637–653.)

A PROPOSAL FOR THE OPTIMAL ANNUITY FUNCTION

This paper joins to the papers of András Simonovits examining the optimal annuity function. With different tools as used by Simonovits, I also present the faults of the hyperbolic annuity function revealed and described by him. Following that with the same tools I also present a whole function-family which avoids these faults, so they fulfill the criteria for the optimal annuity functions made by Simonovits. Comparing these annuity functions with ones constructed upon the experienced mortality used in the daily practice I concluded that they quite resemble to each other. Extending my analysis —with the newly introduced graphical tool— to these annuity functions used in the practice I conclude that these functions share —however quite a limited manner— some faults of hyperbolic annuity functions revealed by Simonovits. I show that using a specific function family fulfilling the criteria of the optimal annuity functions and which are quite resemble to these practical annuity functions, these faults can be eliminated. Moreover we have to take into account that the historic mortality tables are not really appropriate calculating annuities because of the phenomenon of ,,longevity", so we have to project the mortality. During the projection it is quite easy to ,,smooth" the data, so the practical annuity functions can easily make to optimal annuity functions. The paper also presents that Simonovits uses a non conventional concept of ,,actuarial fairness".

BIZTOSÍTÓTÁRSASÁGOK TARTALÉKKÉPZÉSI FOLYAMATÁNAK VIZSGÁLATA ADÓ- ÉS OSZTALÉKFIZETÉS MELLETT[1]

SZABÓ TIBOR – MIHÁLYKÓNÉ ORBÁN ÉVA – MIHÁLYKÓ CSABA
Pannon Egyetem, Veszprém

Cikkünk biztosítótársaságok tartalékképzési folyamatának modellezésével foglalkozik, egy alkalmas célfüggvény optimalizálásán keresztül kontrollálva a biztosítótársaság működését. A biztosítási alapmodell lényege, hogy véletlen időpontokban véletlen nagyságú kárigények érkeznek be a biztosítóhoz, amit a tartalékból, azaz a kezdőtőkéből és a befizetett díjakból fedeznek. A tartalék mennyiségét így egy sztochasztikus folyamat adja meg. Ezt az alapmodellt a szakirodalomban részletesen vizsgálták, és többféleképpen módosították. A cikkben ismertetünk egy, az alapmodellt általánosító, általunk újonnan kidolgozott, az adó- és osztalékfizetést együttesen kezelő összetett modellt, és egy olyan új célfüggvényt, amely mind az állam, mind az ügyfelek, mind a biztosítótársaság tulajdonosainak érdekeit figyelembe veszi. Ez a célfüggvény a biztosítótársaság működése révén létrejött értéket, eredményességet hivatott mérni. Az összetett modellt a küszöb (threshold) osztalékfizetési stratégia alkalmazása esetén részletesebben elemezzük. A célfüggvény értékeit Monte-Carlo szimulációval számítottuk ki, optimalizálását a szimulációs eredmények alapján numerikus módszerek segítségével végezzük el. Végezetül megvizsgáljuk a működést egy másik szempontból, nevezetesen a jövedelmezőségi szempontból is, azaz meghatározzuk, hogy mennyi kezdőtőkét érdemes befektetni az optimális jövedelmezőségi index elérése érdekében.

1 Bevezetés

Az üzleti élet bármely területén működő vállalatok, így a biztosítótársaságok számára is fontos, hogy a működésüket veszélyeztető, üzleti környezetükből fakadó kockázatok felismerhetővé, kezelhetővé váljanak, a menedzsment, a tulajdonosok döntései tervezhetőek, kiszámíthatóak legyenek. A biztosítók kockázata az üzleti környezeten kívül természetesen az általuk kínált szolgáltatás, a biztosítás sztochasztikus természetéből is fakad. Kockázatukra többek között a portfóliójukon, áraikon, osztalékpolitikájukon keresztül lehetnek hatással, ezek révén tudják befolyásolni azt.

E kockázatok felmérése mind a társaságok számára, mind társadalmi szempontból kívánatos. A biztosítótársaságok szerte a világban kiterjedt ügyfélkörrel rendelkeznek, a lakosság szinte egésze rendelkezik valamiféle biztosítással, így a társaságok stabil működése nem csak a tulajdonosok érdeke,

[1]Beérkezett: 2011. november 17. E-mail: `orbane@almos.uni-pannon.hu`.

hanem az ügyfeleké is. Számukra is fontos, hogy a megkötött szerződés érvényben maradjon; a biztosító, amennyiben a biztosítási esemény bekövetkezik, a keletkező kár egy részét vagy teljes egészét megtérítse.

Dolgozatunkban a biztosítótársaságok tartalékképzési folyamatát vizsgáljuk meg; matematikai, illetve számítógépes, ún. Monte Carlo szimulációval történő modellezési lehetőségeit kívánjuk bemutatni a teljesség igénye nélkül. A társaságok működését több jellemzőn keresztül fogjuk értékelni: tönkremenési valószínűség, tönkremenési idő, kifizetett diszkontált osztalék várható értéke, befizetett diszkontált adó várható értéke.

Először röviden bemutatjuk az alapmodellt, majd ezt követően ismertetjük az irodalomban általánosan elfogadott és általunk felhasznált adó-, illetve osztalékfizetés esetét. Jelen publikációban, bár a szakirodalomban az osztalékfizetés számos módja ismert, főleg az ún. küszöb stratégiával foglalkozunk. Ezután tárgyaljuk az általunk megfogalmazott, a továbbiakban összetett jelzővel illetett modellt, amely egyszerre kezeli az osztalék-, illetve az adófizetés problémáját, így egy, a valósághoz közelebb álló modellhez jutunk, amelyet ismereteink szerint a szakirodalomban eddig nem vizsgáltak. Az összetett modell azon esetével foglalkozunk, amikor a küszöb osztalékfizetési stratégia szerint történik az osztalékfizetés.

A modell további elemekkel is bővíthető lenne, például a tartalék pénzügyi befektetésének figyelembe vételével, viszontbiztosítás kötésével, a tartalék kritikus szint alá esése esetén a csőd elkerülése érdekében további tőkebefektetéssel vagy áthidaló kölcsön felvételével, de jelen dolgozatunkban ezeket nem építettük be a modellbe.

Az egyes modellek általános vizsgálati módszere az, hogy a megadott célfüggvényre egy integrálegyenletet illetve integro-differenciálegyenletet írnak fel, s ezt próbálják megoldani (Lin, S. et al., 2003, Gerber & Shiu, 2006, Albrecher & Hipp, 2007). Ezek az egyenletek azonban csak nagyon speciális esetekben oldhatók meg analitikusan (jellemzően exponenciális-exponenciális eloszláspár mellett), így az összetett modellben az elemzés eszközéül a Monte-Carlo szimulációt alkalmaztuk. A számítógépes szimuláció nagy előnye, hogy bármilyen idő- és kárigényeloszlás mellett alkalmazható, így akkor is képes kiszámolni a kérdéses várható értékeket, amikor rájuk vonatkozólag analitikus formula nem áll rendelkezésünkre. Szimulációval való megoldásra találhatunk a szakirodalomban is példát többek között az (Albrecher & Kainhofer, 2002) és az (Albrecher et al., 2005) publikációkban. Az elemzések elvégzéséhez szimulációs programokat készítettünk. A dolgozatban látható ábrákat, illetve az előállításukhoz felhasznált szimulációs programokat a MatLab R2007b verziójú matematikai programcsomag alkalmazásával készítettük el.

2 A modell

2.1 Az alapmodell

A modell a biztosítótársaság tartalékképzési folyamatából adódóan a tartalék mennyiségét adja meg bármely $t \geq 0$ időpontban. E tartalék három összetevő eredőjeként áll elő: a biztosítótársaság tulajdonosai által induláskor rendelkezésre bocsátott kezdőtőkéből, a társaság működése során az ügyfelek által befizetett biztosítási díjakból, valamint a biztosítótársaság által az ügyfelek részére kifizetett kárösszegekből. A tartalék értékét az idő függvényében tehát a következőképpen írhatjuk fel (Gerber & Shiu, 1998, Albrecher & Thonhauser, 2007, Ming & Junyi, 2008):

$$U(t) = x + ct - \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i \,. \tag{1}$$

A fenti képletben $0 \leq x$ jelenti a kezdőtőkét, amely a tulajdonosok által a biztosítótársaság alapításakor befektetett tőkemennyiség. A ct az ún. díjbevételi folyamat, amely során az egységnyi idő alatt befolyó biztosítási díjak összegét —a szakirodalomban általánosan elfogadottan— időben állandónak feltételezzük. A harmadik tag az ún. kárfolyamat, amely abból áll, hogy véletlen időpontokban véletlen nagyságú kárigények érkeznek be a biztosítóhoz, amelyek kifizetése csökkenti a tartalék értékét.

A képletben szereplő Y_i mennyiségek az i-edik beérkező kárigény nagyságát jelölik. Szokásos feltevés Y_i-ről, hogy azonos $G(y)$ eloszlású, nemnegatív értékű, egymástól független valószínűségi változók, μ_g véges várható értékkel. További szokásos feltevés, hogy az $i-1$-edik és az i-edik kárigény közt eltelt idők nagyságát t_i nemnegatív, független valószínűségi változók adják meg, amelyeknek $F(t)$ eloszlásfüggvénye azonos, μ_f várható értéke véges. $N(t)$ a következőképpen definiálható sztochasztikus folyamat:

$$N(t) = \begin{cases} 0, & \text{ha } t < t_1 \\ k, & \text{ha } \sum_{i=1}^{k} t_i \leq t, \text{ de } t < \sum_{i=1}^{k+1} t_i \,. \end{cases} \tag{2}$$

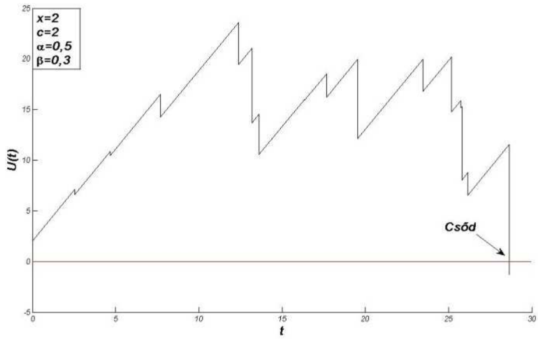
Azon esetben, amikor a károk közt eltelt időközök eloszlása tetszőleges, Sparre Andersen modellről beszélünk (Sparre Andersen, 1957).

A Sparre Andersen modell egy speciális esete, ha a károk közt eltelt idők exponenciális eloszlásúak α paraméterrel. Ebben az esetben $N(t)$ α paraméterű Poisson-folyamat, s ekkor klasszikus kockázati folyamatról beszélhetünk (Lundberg, 1909).

Általában fel szokták tételezni, hogy $N(t)$ és Y_i egymástól független. E korlátozás feloldása azt jelentené, hogy a beérkező kárigény nagysága függ annak időpontjától, például természeti károk esetén (árvíz, földrengés, tornádó) általában több és nagyobb kárigényt nyújtanak be. A továbbiakban megmaradunk a függetlenség feltételezése mellett, hiszen ez mind analitikusan, mind szimulációval könnyebben kezelhető.

Mint a bevezetőben említettük, vizsgálni fogjuk a tönkremenés valószínűségét is. Ez annak az eseménynek a valószínűségét jelenti, hogy valamely rögzített x kezdőtőke esetén elfogy a biztosítótársaság tartalékja, s így a biztosítótársaság tönkremegy, vagyis

$$\psi(x) = P(x + ct - \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i < 0 \text{ valamely } 0 \leq t \text{ esetén}) \,. \tag{3}$$



1. ábra. A tartalék változása az idő függvényében

Természetesen érdekes a tönkremenés ideje is, amelyet a következőképpen írhatunk fel:

$$T_U = \begin{cases} \inf\{\, t \geq 0 : u(t) < 0 \,\}, & \text{ha létezik } 0 \leq t, \text{ amelyre } U(t) < 0 \\ \infty\,, & \text{ha } 0 \leq U(t) \text{ minden } 0 \leq t \text{ esetén,} \end{cases} \tag{4}$$

vagyis ha a biztosítótársaság tönkremegy, akkor a tönkremenés idejének a legelső olyan időpillanatot tekintjük, amikor a tartalék értéke 0 alá csökken, azaz tartozása lesz az ügyfelek felé. Ha ez sosem történik meg, akkor a tönkremenés idejét végtelennek definiáljuk.

Az *1. ábrán* bemutatjuk a fent definiált kockázati folyamat egy lehetséges realizációját.

Az ábrán a folyamatot $x = 2$ kezdőtőkéről indítottuk. A tartalék értéke egyenletesen, $c = 2$ intenzitással nőne (2 meredekségű szakaszok), amennyiben nem érkeznének be véletlen időpontokban véletlen nagyságú kárigények (függőleges ugrások). A realizáció során mind az időközök, mind pedig a kárigények generálására exponenciális eloszlást használtunk, $\alpha = 0{,}5$ és $\beta = 0{,}3$ paraméterrel. Az ábráról leolvasható a csőd időpontja, ami $T_U(2) = 28{,}66$ időegység.

2.2 Osztalékfizetés

2.2.1 Az osztalékfizetés általános leírása

Módosítsuk az alapmodellt oly módon, hogy a tulajdonosok számára osztalékot fizetnek a társaság tartalékából a kockázati folyamatok irodalmában általánosan elfogadott módon (Gerber & Shiu, 2006, Ming & Junyi, 2007, Avanzi, 2007).

Jelölje $D(t)$ a t ideig kifizetett nominális, vagyis az inflációval nem kiigazított osztalék értékét. Ekkor a tartalék értéke a t időpontban $D(t)$ értékével csökken, vagyis

$$R_D(t) = U(t) - D(t)\,, \quad t \geq 0\,. \tag{5}$$

A tulajdonosok által megkapott osztalék jelenértékét a következő Stieltjes-integrállal számíthatjuk ki:

$$K_D(x) = \int_0^{T_D(x)} e^{-\delta t}\, dD(t)\,. \tag{6}$$

A képletben szereplő δ az inflációs ráta. Kizárólag a $0 \leq \delta$ esetekkel fogunk foglalkozni, vagyis amikor az árszínvonal változatlan, illetve infláció van. Mivel folytonos esetről van szó, ezért t időpillanatban a diszkonttényező értékét az $e^{-\delta t}$ kifejezés adja meg. Bár a valóságot nyilván nem írja le tökéletesen, a kockázati folyamatok elemzésénél általánosan elfogadott a konstans inflációs ráta feltételezése (Albrecher et al. 2005, Gerber & Shiu, 2006, Avanzi, 2007).

Az integrál felső határában szereplő $T_D(x)$ a tönkremenési idő osztalékfizetés mellett, amely a korábbiakhoz hasonlóan definiálható. Az integrálban a $D(t)$ folyamat szerint végezzük az integrálást, mert az osztalékfizetési stratégia során osztalékként újonnan kifizetett összegek ($D(t)$ változásainak) jelenértékére vagyunk kíváncsiak.

Osztalékot, mint korábban említettük, többféle stratégia szerint fizethetnek. Ha megadunk egy osztalékfizetési szabályt, vagyis, hogy mely esetben mi módon fizetnek osztalékot a tulajdonosok részére, azzal meghatározzuk $D(t)$-t. A szakirodalomban, hogy az optimális stratégia meghatározásának kérdése matematikailag kezelhető legyen, a vizsgált stratégiák halmazát leszűkítik az ún. megengedett stratégiák halmazára. Ezt jelölje C, és legyen $D = \{\, D(t)\,\}_{t \geq 0}$ olyan osztalékfizetési folyamat, amelyre $D \in C$. E C halmazba tartozó stratégiákra az alábbi három feltételnek kell teljesülnie:

1. $D(t-) = D(t)\,,$

2. $D(t)$ növekvő függvény,

3. $D(t+) - D(t) \leq R_D(t)\,.$

Az első tulajdonság pusztán a matematikai kezelhetőség miatt fontos; a második feltétel szerint a tulajdonosok nem fizethetnek vissza a társaság kasszájába a kapott osztalékból; míg a harmadik azt fejezi ki, hogy az újonnan kifizetett osztalék nem lehet több, mint a tartalék mennyisége, vagyis osztalékfizetés miatt közvetlenül nem mehet csődbe a biztosítótársaság.

Mivel $D(t)$ értéke a sztochasztikus alapmodelltől függ, valamint $T_D(x)$ is egy véletlentől függő mennyiség, ezért $K_D(x)$ értéke egy valószínűségi változó, így $K_D(x)$ várható értékét érdemes figyelembe venni.

Ugyan a tulajdonosok érdeke az is, hogy a vállalat értéke minél nagyobb legyen, azonban jelen publikációban ezt a részérdeket figyelembevételének modellbeli bonyolultsága miatt elhagyjuk. Így a szakirodalomban általánosan elfogadott módon, az osztalék jelenértéke várható értékének maximalizálását vizsgáljuk mi is (Asmussen & Taksar 1997, Lin et al. 2003, Avanzi, 2007). Az összes megengedett stratégia halmazán optimalizálandó célfüggvény matematikailag tehát a következő:

$$V_D(x) = E(K_D(x)) = E\Big(\int_0^{T_D(x)} e^{-\delta t}\, dD(t)\Big)\,. \tag{7}$$

Jelen esetben azonban csupán a küszöb stratégiák halmazán kívánjuk a maximumot megkeresni a stratégia paramétereinek optimális kiválasztásával.

2.2.2 Küszöb osztalékfizetési stratégia

Küszöb stratégián a biztosítótársaság olyan osztalékfizetési stratégiáját értjük, amely során a befolyó díjak egy részét kifizetik osztalékként, ha a tartalék értéke elér egy meghatározott szintet, illetve afelett van, a beszedett díjak másik része viszont a tartalék szintjét növeli. Ezzel szemben, ha a tartalék értéke nem éri el ezt a korlátot, a díjak teljes egészében a tartalékhoz kerülnek. Matematikailag ezt a következőképpen fogalmazhatjuk meg:

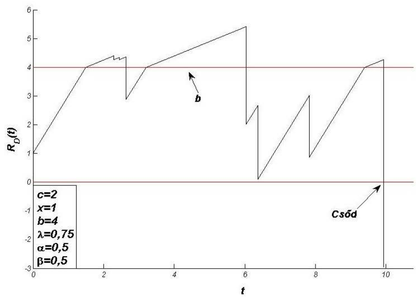
$$dD(t) = \begin{cases} 0\,, & \text{ha } 0 \le R_D(t) < b \\ \lambda c\, dt\,, & \text{ha } b \le R_D(t)\,, \end{cases} \tag{8}$$

vagyis ha a tartalék szintje 0 és a korlát értéke között van, a nominális osztalék értéke nem változik, ellenkező esetben $\lambda \in [0,1]$ részét a c intenzitással befolyó díjaknak kifizetik a tulajdonosok részére (Gerber & Shiu, 2006, Avanzi, 2007, Ming & Junyi 2008). Tehát a küszöb stratégiának két szabadon megválasztható paramétere van, a b küszöb és a λ intenzitás.

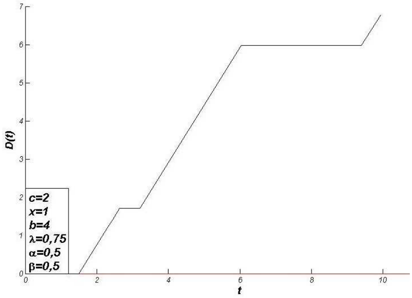
A $\lambda = 1$ szélső esetben az ún. konstans korlát (constant barrier) stratégiáról beszélhetünk, amikor is, ha a tartalék értéke eléri az osztalékfizetési korlátot, a teljes befolyó díjat kifizetik osztalékként, így a tartalék értéke nem változik (Lin et al., 2003, Avanzi, 2007). E stratégiára még a későbbiekben hivatkozunk. Ha $\lambda = 0$, akkor nem történik osztalékfizetés, így az alapmodellhez jutunk.

A küszöb stratégia optimális az összes megengedett stratégia körében, ha az osztalék növekedési üteme korlátos (Asmussen & Taksar, 1997). Ez esetben létezik a szakirodalomban a diszkontált osztalék várható értékére, illetve az optimális korlát szintjére analitikus formula abban a speciális esetben, amikor mind az időközök, mind a kárigények eloszlása exponenciális. A megoldásokat Gerber és Shiu dolgozták ki (Gerber & Shiu, 2006). Ebben az esetben a szakirodalomban megtalálható a tönkremenés valószínűségének explicit megadása is, amelyet Ming és Junyi publikáltak (Ming & Junyi, 2008). Mindezek miatt kiemelten érdekes ez a típusú stratégia.

Az alábbi ábrákon a küszöb osztalékfizetési stratégia mellett a tartalék és a tulajdonosok számára kifizetett osztalék alakulásának egy realizációját szemléltetjük.



2. ábra. A tartalék időbeli változása küszöb osztalékfizetési stratégia szerinti osztalékfizetés esetén



3. ábra. A nominális osztalék alakulása küszöb osztalékfizetési stratégia szerinti osztalékfizetés esetén

A *2. ábrán* a küszöb osztalékfizetési stratégiával módosított folyamatot tüntettük fel. Látható az ábrán, hogy amikor $b \leq R_D(t)$, akkor $\lambda \cdot c$ intenzitással fizetnek osztalékot (a tartalék értéke $(1-\lambda) \cdot c$ intenzitással nő), így a *3. ábrán* látható nominális osztalék értéke növekszik, ellenkező esetben változatlan marad.

2.3 Adófizetés

Az általunk vizsgált adófizetési módot először Albrecher és Hipp vezették be, és vizsgálták a tönkremenés valószínűségének és a diszkontált adó várható értékének tulajdonságait (Albrecher & Hipp, 2007).

Cikkükben olyan adófizetési modellt tekintettek, amely során, ha a biztosító tartalékának értéke elér egy meghatározott szintet, adókötelessé válik, és ezután olyan esetekben fizet az államnak adót, amikor a tartalék értéke eléri, illetve meghaladja a korábbi maximumát, vagyis amikor a korábbiakhoz képest nyereséges helyzetben van. Ellenkező esetekben nem történik adófizetés.

Jelölje $\gamma \in [0,1]$ az adókulcsot, amely azt adja meg, hogy adófizetés esetén a c intenzitással befolyó díjak mekkora hányadát fizeti be a társaság adóként, illetve R^Γ a tartalék azon szintjét, amelynek elérésétől már adóköteles a biztosítótársaság. Erre a továbbiakban adózási szintként hivatkozunk. $\Gamma(t)$-vel jelöljük a t ideig befizetett nominális adó értékét. Ekkor a tartalék értéke adófizetés esetén:

$$R_\Gamma(t) = U(t) - \Gamma(t)\,, \quad t \geq 0\,. \tag{9}$$

Adófizetés abban az esetben történik, ha a biztosítótársaság tartalékának értéke elérte az adózási szintet, illetve e szint felett nyereséges helyzetben van, vagyis amikor

$$R_\Gamma(t) = \max\{\, R_\Gamma(u) : u \leq t;\; R^\Gamma\,\} \tag{10}$$

Ekkor a befolyó díjak γ hányadát befizetik adóként, vagyis időegységenként az állam $\gamma \cdot c$ bevételre tesz szert és a fennmaradó $(1-\gamma) \cdot c$ rész kerül a biztosítótársaság kasszájába. Ellenkező esetben a tartalék értéke a befolyó díjak teljes intenzitásával növekszik, és az állam adóbevétele ekkor nem változik.

Az effajta adóztatási politika, ha nem is pontosan az ismertetett módon, de az üzleti életben megtalálható, hiszen a társaságok veszteségeiket számviteli eljárások során elszámolhatják későbbi bevételük terhére, így adót csak a kiegyenlítés után keletkező bevételeikből fizetnek.

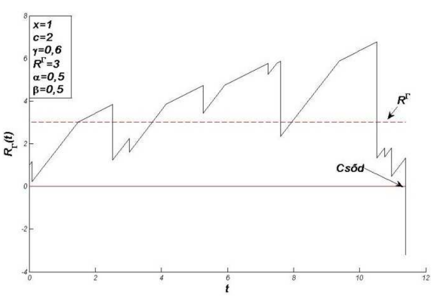
A fent definiált adóztatás során a befizetett adó értéke a sztochasztikus alapfolyamattól, illetve a véletlentől függő $T_\Gamma(x)$-től, vagyis az adófizetés melletti tönkremenési időtől függ, így egy sztochasztikus folyamat, emiatt az inflációval kiigazított várható értékét vizsgáljuk, amely a következőképpen írható fel (Albrecher & Hipp, 2007):

$$\nu(x,\gamma,R^\Gamma) = E\Big(\int_0^{T_\Gamma(x)} e^{-\delta t}\, d\Gamma(t)\Big)\,. \tag{11}$$

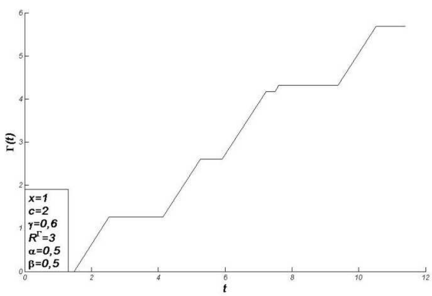
A korábbiakhoz hasonlóan a tönkremenés valószínűsége azon esemény bekövetkezésének az esélye, hogy adófizetés mellett elfogy a tartalék. E valószínűségre Albrecher és Hipp analitikus formulát adtak azon esetben, amikor mind az időközök, mind a kárigények eloszlása exponenciális, valamint $R^\Gamma = x$, vagyis a társaság az indulásától kezdve a nyereséges helyzetekben adót fizet (Albrecher & Hipp, 2007).

A *4-5. ábrákon* az adófizetéssel bővített kockázati folyamat egy realizációját mutatjuk be. Az ábrák egyazon realizáció különböző részfolyamatait mutatják. A paraméterek a következők voltak: a kezdőtőke értéke $x = 1$, a befolyó díjak mértéke időegységenként $c = 2$, az exponenciális eloszlások paraméterei $\alpha = 0{,}5$ és $\beta = 0{,}5$ volt. A szimuláció során 60%-os adókulcsot alkalmaztunk, vagyis γ értékét 0,6-ra állítottuk a jobb illusztráció érdekében. Az adózási szint $R^\Gamma = 3$ volt.

A *4. ábrán* az adófizetés melletti kockázati folyamatot tüntettük fel. Látható, hogy adófizetés esetén, amint a tartalék eléri az adózási szintet, illetve ezután a korábbi maximális értékét, a következő káreseményig a tartalék $(1-\gamma)\cdot c$-vel nő időegységenként. Ekkor az *5. ábrán* látható nominális adó értéke $\gamma\cdot c$ meredekséggel nő. Ha a tartalék a korábbi maximuma alatt marad, akkor nincs adófizetés.



4. ábra. A tartalék időbeli változása adófizetéssel bővített folyamat esetén



5. ábra. A nominális adó időbeli változása adófizetéssel bővített folyamat esetén

3 Összetett modell

3.1 Az összetett modell és a többszempontú biztosítási célfüggvény

A továbbiakban olyan modellt vizsgálunk, amelyben mind adó-, mind osztalékfizetés történik. Bár az irodalomban külön-külön mind az adófizetést, mind az osztalékfizetést vizsgálták, nincs tudomásunk olyan modellről, amely az adó- és az osztalékfizetést egyszerre kezelné.

Jelölje továbbra is $D(t)$ a nominális osztalék, míg $\Gamma(t)$ a nominális adó értékét. Ekkor az összetett modell esetében a pénzügyi tartalék értéke a t időpontban:

$$R_{(\Gamma,D)}(t) = U(t) - D(t) - \Gamma(t)\,, \quad t \geq 0\,. \tag{12}$$

A tönkremenési idő alatt —amelyet $T_{(\Gamma,D)}(x)$-szel jelölünk— az eddigiekhez hasonlóan azt a legkorábbi időpontot értjük, amikor a tartalék értéke negatívvá válik; a tönkremenés valószínűsége pedig ezen esemény bekövetkezésének a valószínűsége.

A továbbiakban főként a következő célfüggvényt vizsgáljuk, s ennek keressük a maximumát:

$$\begin{aligned} W(x,D,\gamma,R^\Gamma) = E\Bigg(\Lambda_1 \int_0^{T_{(\Gamma,D)}(x)} e^{-\delta t}\, dD(t) + \\ + \Lambda_2 \int_0^{T_{(\Gamma,D)}(x)} e^{-\delta t}\, d\Gamma(t) + \Lambda_3 \int_0^{T_{(\Gamma,D)}(x)} e^{-\delta t}\, dt\Bigg)\,. \end{aligned} \tag{13}$$

A tulajdonosok számára kifizetett osztalék várható értékét Albrecher és Thonhauser 2007-ben vizsgálták (Albrecher & Thonhauser, 2007) és az általuk elemzett függvény $W(x,D,\gamma,R^\Gamma)$ speciális esete $\gamma = 0$, $\Lambda_3 \in R_0^+$, $\Lambda_1 = 1$, $\Lambda_2 = 0$ választás mellett. $\gamma = 0$ biztosítja, hogy nem történik adófizetés.

A $W(x,D,\gamma,R^\Gamma)$ célfüggvényben a biztosítási piac három főbb szereplőjének érdekét megtestesítő mennyiségek várható értéke szerepel súlyozva, ahol a nemnegatív súlyokra igaz, hogy összegük egy, azaz $0 \leq \Lambda_i$, $i = 1,2,3$, $\Lambda_1 + \Lambda_2 + \Lambda_3 = 1$. A súlyok egymáshoz viszonyított aránya az egyes szereplők érdekeinek fontosságát mutatja. A célfüggvényben az első tag a vizsgált biztosítótársaság tulajdonosai részére kifizetett diszkontált osztalék várható értékének Λ_1-szerese. Az összeg második tagja az államnak befizetett diszkontált adó várható értéke Λ_2-vel súlyozva. Mivel az állam a beszedett adókból közjavakat állít elő, közjavakat biztosít, amelyből mind az ügyfelek, mind a tulajdonosok részesülnek, ezért ez mindenki számára valamekkora előnnyel jár. Másrészt azonban a biztosítótársaság megadóztatása a tulajdonosokat és az ügyfeleket negatívan érinti, hiszen az állam pénzt von el a biztosító tartalékából, így hamarabb történik esetlegesen csőd, illetve az osztalék értéke is csökken mind az adózás, mind a korábban bekövetkező esetleges csőd miatt. Az adó effajta hatása megjelenik a diszkontált osztalék és a tönkremenési idő várható értékében is, csökkentve azt. A célfüggvény utolsó tagja a biztosítótársaság működését méri oly módon, hogy a társaság későbbi időben történő működtetését egyre kisebb mértékben veszi figyelembe. Ezt értelmezhetjük úgyis, mintha minden időegység alatt a társaság működése 1 pénzegység hasznot jelentene az ügyfelek számára, és ennek az összegnek a diszkontált értékét szerepeltetjük a célfüggvényben súlyozva. Megjegyezzük, hogy diszkontálás miatt a harmadik tag akkor is végessé válik, ha a tönkremenési idő végtelen. Mivel jelen esetben a biztosítási piac szereplőinek érdekeit egyesítjük, az így értelmezett $W(x, D, \gamma, R^\Gamma)$ függvényt többszempontú biztosítási célfüggvénynek nevezzük.

Mivel nem ismerünk analitikus formulákat $W(x, D, \gamma, R^\Gamma)$ értékeire, cikkünk következő részében Monte-Carlo szimuláción alapuló, általunk kidolgozott programok segítségével mutatjuk be az adófizetés és a küszöb stratégia szerinti osztalékfizetés esetében az egyes függvények alakját, értelmezzük a kapott eredményeket, valamint szimulációs módszeren alapuló numerikus eljárást felhasználva elvégezzük bizonyos paraméterekben az optimalizálást.

3.2 Küszöb osztalékfizetési stratégia adófizetés mellett

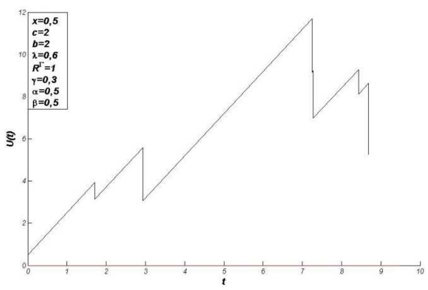
Ebben a részben a küszöb osztalékfizetési stratégia melletti adófizetés kérdését elemezzük. Miután definiáltuk és bemutattuk a folyamatot, megvizsgáljuk egyes változók hatását, értelmezzük a kapott eredményeket, végül néhány példát mutatunk a $W(x, D, \gamma, R^\Gamma)$ függvény maximalizálására.

Küszöb stratégia esetén a tartalék szintjétől függően több esetet is meg kell különböztetnünk. Ha $R_{(\Gamma,D)}(t) < b$ és $R_{(\Gamma,D)}(t) < \max\{\, R_{(\Gamma,D)}(u) : u \leq t;\ R^\Gamma \,\}$ teljesül, a befizetett biztosítási díjak teljes egésze a pénzügyi tartalék értékét növeli, a biztosítótársaság sem adó-, sem osztalékfizetési helyzetben nincs, így a kárrendezéseken felül egyéb kifizetés nem történik. Ha a társaság adókötelessé vált és nyereséges helyzetben van, de a tartalék értéke nem éri el az osztalékfizetési korlátot, azaz a $\max\{\, R_{(\Gamma,D)}(u) : u \leq t;\ R^\Gamma \,\} = R_{(\Gamma,D)}(t) < b$ eset áll fenn, akkor az adófizetés miatt a biztosítónak csak a befolyó díjak $(1-\gamma)$ hányada jut, a befizetett adó nominális értéke időegységenként $\gamma \cdot c$-vel nő.

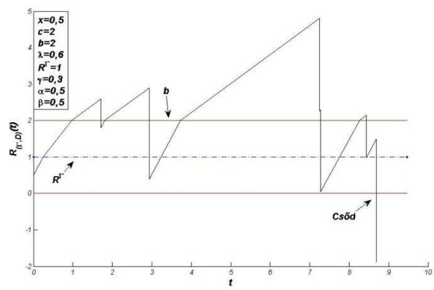
Ha $b \leq R_{(\Gamma,D)}(t) < \max\{\, R_{(\Gamma,D)}(u) : u \leq t;\ R^\Gamma \,\}$, vagyis a tulajdonosok részére osztalékot fizetnek, de adófizetés nem történik, akkor a tulajdonosok időegységenként nominálisan $\lambda \cdot c$ osztalékhoz jutnak, emiatt a kasszában lévő tartalék értéke csak $(1-\lambda) \cdot c$-vel nő. Azonban, ha $b \leq R_{(\Gamma,D)}(t)$ és az $R_{(\Gamma,D)}(t) = \max\{\, R_{(\Gamma,D)}(u) : u \leq t;\ R^\Gamma \,\}$ eset áll fenn, vagyis egyszerre történik adó- és osztalékfizetés, nem egyértelmű a változás. Feltesszük, hogy az állam megkerülhetetlenül tudja érdekeit érvényesíteni, így először adófizetés történik. Emiatt vizsgálnunk kell, hogy ezen kötelezettség teljesítése után a befolyó díjak meghaladják-e az osztalékfizetés esetén érvényes tartaléknövekedési ütemet, vagy sem. Ha az $(1-\lambda) \leq (1-\gamma)$ eset áll fenn, az államnak befizetett nominális adó értéke $\gamma \cdot c$-vel, az osztaléké $(\lambda-\gamma) \cdot c$-vel, míg a biztosítótársaság tartaléka időegységenként $(1-\lambda) \cdot c$-vel növekszik. Ellenkező esetben (vagyis ha $(1-\gamma) < (1-\lambda)$) az adó befizetése után a biztosítótársaság nem jut annyi szolgáltatási díjhoz, hogy annak egy részét kifizethetné osztalékként. Ekkor az eddig kifizetett osztalék értéke változatlan marad, az adó nominális értéke azonban $\gamma \cdot c$-vel, míg a pénzügyi tartalék értéke $(1-\gamma) \cdot c$-vel nő.

A küszöb stratégia azon eseteiben, amikor $\lambda \neq 1$, bár közgazdaságilag nem logikus, matematikai szempontból akár meg is engedhetjük, hogy az osztalékfizetési korlát kisebb legyen, mint az adózási szint. Ekkor a későbbiek során történhet adófizetés, hiszen osztalékfizetés mellett is növekszik a tartalék értéke, s elérheti az adófizetési korlátot.

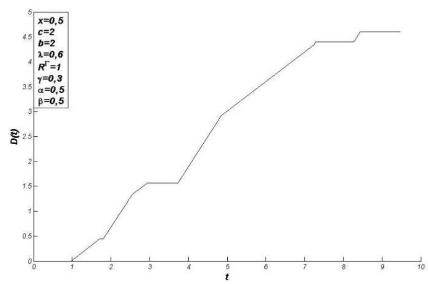
A *6-9. ábrákon* bemutatjuk a folyamat egy lehetséges realizációját.



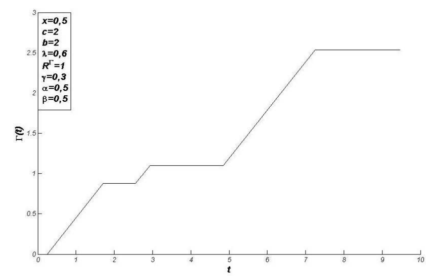
6. ábra. A tartalék alakulása adó- és osztalékfizetés nélkül



7. ábra. A tartalék alakulása adó- és osztalékfizetés esetén



8. ábra. A nominális osztalék alakulása



9. ábra. A nominális adó alakulása

A fenti ábrák mindegyike egy realizáció különböző részfolyamatait mutatja. A beállított paraméterek a következők voltak: $x = 1$, $c = 2$, $b = 2$, $\lambda = 0{,}6$, $\gamma = 0{,}3$, $R^{\Gamma} = 1$. Az exponenciális eloszlások paramétereit $\alpha = 0{,}5$ és $\beta = 0{,}5$-nek választottuk.

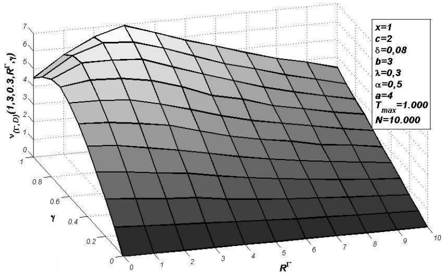
A *7. ábrán* a biztosítótársaság tartalékának változását ábrázoltuk. Mivel az adózási szint alacsonyabban van, mint az osztalékfizetési korlát, így azt hamarabb éri el a tartalék értéke. A $t = 0{,}25$ időpillanattól kezdve történik adófizetés, így a *9. ábrán* feltüntetett $\Gamma(t)$ függvény értéke $\gamma \cdot c$-vel, míg $R_{(\Gamma,D)}(t)$ értéke $(1-\gamma) \cdot c$-vel növekszik időegységenként $t = 0{,}9643$-ig, amikortól is osztalékfizetés is történik. Az időegységenként befolyó díjak adófizetés után fennmaradó részéből, mivel annak értéke nagyobb, mint osztalékfizetés mellett a tartalék növekedési üteme, $(\lambda-\gamma) \cdot c$ összeget kifizetnek osztalékként, amelynek alakulását a *8. ábrán* láthatjuk. A $t = 3{,}731$ időponttól ismét történik osztalékfizetés, ám mivel a tartalék értékének korábbi maximuma az e pontbeli tartalék értékénél magasabban van, így adófizetés nem történik. Ez csak $t = 4{,}854$-től történik meg ismét, amikor eléri a tartalék értéke annak korábbi maximumát, így a nominális osztalék növekedési üteme lecsökken, azért látható az ábrán a törés. A csőd $t = 8{,}685$-nél következik be. A *6. ábrán* az alapfolyamatot tüntettük fel, amikor sem adó-, sem osztalékfizetés nem történik.

A továbbiakban az adózási szint és az adókulcs változásának hatását járjuk körbe. A bemutatásra kerülő ábrák egyazon futtatás eredményei, amelynek paraméterei a következők voltak: $x = 1$, $c = 2$, $\delta = 0{,}08$, $b = 3$, $\lambda = 0{,}3$, $T_{\max} = 1000$, $N = 10000$. Itt $T_{\max}$ jelöli azt az időt, ameddig az egyes realizációkat maximálisan vizsgáljuk, s N darab realizációból számítottuk ki az egyes függvényértékeket. Az időközök eloszlása exponenciális volt $\alpha = 0{,}5$ paraméterrel, míg a kárigények $a = 4$ paraméterű Pareto-eloszlásból származtak, azaz

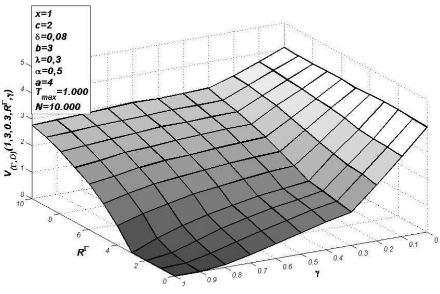
$$G(y) = \begin{cases} 1 - \frac{a^4}{(y+a)^3}\,, & \text{ha } 0 \le y \\ 0\,, & \text{ha } y < 0\,. \end{cases}$$

A *10. ábrán* az összetett modell esetén a diszkontált adó várható értékét megadó $\nu_{(\Gamma,D)}(1{,}3, 0{,}3, \gamma, R^\Gamma)$ függvényt ábrázoltuk R^Γ és γ függvényében. Látható, hogy a $\gamma = 1$ és $R^\Gamma = 3$ pontban a függvénynek maximuma van. Ennek oka, hogy a $3 = b < R^\Gamma$ esetekben a tartalék értéke előbb éri el az osztalékfizetési korlátot, mint az adózási szintet, illetve a korábbi maximális értékét, így az osztalékfizetési korlát elérése után annak értéke csak $(1-\lambda)\cdot c$ intenzitással növekszik az osztalékfizetés miatt. A tartalék értékének lassabb növekedési üteme miatt így kevesebbszer és átlagosan időben később történik adófizetés. A vizsgált esetben a diszkontált adó jelenértéke 100%-os adókulcs mellett maximális, azonban ez nem jelenti azt, hogy a társadalom számára is ez lenne az optimális.

A diszkontált osztalék várható értékét megadó $V_{(\Gamma,D)}(1{,}3, 0{,}3, \gamma, R^\Gamma)$ függvényt a *11. ábrán* tüntettük fel az adókulcs és az adózási szint függvényében. Megállapíthatjuk, hogy ennek értéke γ-ban szigorúan monoton csökkenő, vagyis több osztalék kerül jelenértékben kifizetésre, ha csökken az adókulcs.



10. ábra. A diszkontált adó várható értéke az adózási szint és az adókulcs függvényében



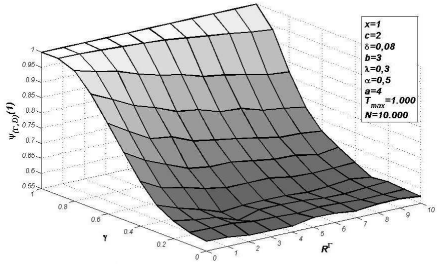
11. ábra. A diszkontált osztalék várható értéke az adózási szint és az adókulcs függvényében

Ekkor a befizetett díjak egysége γ értékének csökkenése miatt kisebb adókulcs alá esik, így egyidejű adó- és osztalékfizetés esetén az állam kevesebbet von el a társaságtól, a befizetett díjak nagyobb részét fizethetik ki a tulajdonosok számára. Megállapíthatjuk továbbá az ábra alapján, hogy $\gamma \in (0,1)$ esetén az osztalék jelenértéke az adózási szint növekedésével monoton nő, hiszen így csak magasabb tartalékszint elérése után válik a biztosító adókötelessé. A $\gamma = 0$ esetben nem történik adófizetés, így a $V_{(\Gamma,D)}(1{,}3, 0{,}3, \gamma, R^{\Gamma})$ függvény értéke változatlan. Amennyiben $\gamma = 1$, az $R^{\Gamma} \leq b = 3$ esetekben nem fizetnek sosem osztalékot, hiszen előbb éri el a biztosítótársaság tartaléka az adózási szintet (amelyet $\gamma = 1$ miatt nem haladhat meg), mint az osztalékfizetési korlát értékét.

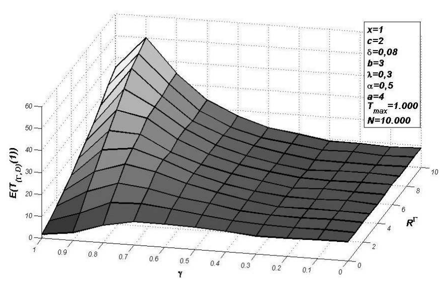
A *12. ábrán* a tönkremenés valószínűségét megadó $\Psi_{(\Gamma,D)}(1)$ függvényt ábrázoltuk. Adott paraméterek mellett a tönkremenés valószínűsége monoton növekvő γ-ban, vagyis nagyobb adókulcs mellett nagyobb valószínűséggel megy csődbe a társaság, valamint az adózási szint növekedésével $\Psi_{(\Gamma,D)}(1)$ értéke monoton csökken, hiszen magasabb tartalék felhalmozása után válik a társaság adókötelessé, így kisebb eséllyel fogy el a tartalék.

Az $E(T_{(\Gamma,D)}(1) \cdot 1_{T_{(\Gamma,D)}(1)<\infty})$ függvényt, vagyis a véges tönkremenési idő várható értékét ábrázoltuk a *13. ábrán* az adókulcs és az adózási szint függvényében egységnyi kezdőtőke mellett. A tönkremenési idő várható értéke egészen $\gamma = 0{,}9$-ig növekvő az adókulcs függvényében. Ennek oka, hogy ezekben az esetekben a tönkremenés valószínűsége különbözik egytől, és a csőd várhatóan akkor történik meg, amikor még nem halmozódott fel akkora tartalék, hogy a nagyobb kárigényeket is ki tudja a társaság elégíteni. Ha azonban $\gamma = 1$, a tönkremenés valószínűsége 1. Ekkor az előző esetekhez képest a tartalék értéke nem nőhet R^{Γ} fölé, és emiatt a csőd átlagosan korábban következik be. $E(T_{(\Gamma,D)}(1) \cdot 1_{T_{(\Gamma,D)}(1)<\infty})$ értéke az adózási szint monoton növekvő függvénye.

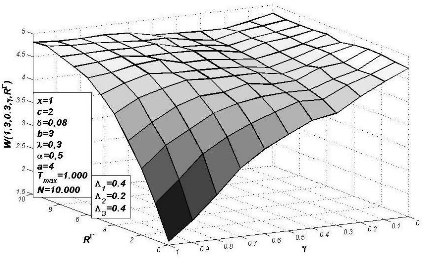
Ezen szimulációból származó utolsó két bemutatásra kerülő ábránk a $W(1{,}3, 0{,}3, \gamma, R^{\Gamma})$ függvényt mutatja eltérő súlyok esetén *(14.a-b ábrák)*.



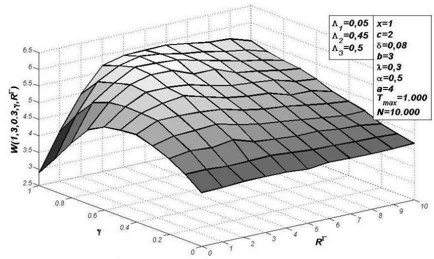
12. ábra. A tönkremenés valószínűsége az adózási szint és az adókulcs függvényében



13. ábra. A tönkremenési idő várható értéke az adózási szint és az adókulcs függvényében



14.a ábra. A többszempontú biztosítási célfüggvény az adózási szint és az adókulcs függvényében $\Lambda_1 = 0{,}4$, $\Lambda_2 = 0{,}2$, $\Lambda_3 = 0{,}4$ súlyok alkalmazásával



14.b ábra. A többszempontú biztosítási célfüggvény az adózási szint és az adókulcs függvényében $\Lambda_1 = 0{,}05$, $\Lambda_2 = 0{,}45$, $\Lambda_3 = 0{,}5$ súlyok alkalmazásával

A *14.a ábrán* a súlyok a következők voltak: $\Lambda_1 = 0{,}4$, $\Lambda_2 = 0{,}2$, $\Lambda_3 = 0{,}4$. Az alkalmazott súlyoknak köszönhetően az ábra alakjában hangsúlyos a diszkontált osztalék várható értékének alakja. A *14.b ábrán* látható, hogy a megadott súlyok miatt, amelyek rendre $\Lambda_1 = 0{,}05$, $\Lambda_2 = 0{,}45$ és $\Lambda_3 = 0{,}5$ voltak, a $W(1{,}3, 0{,}3, \gamma, R^{\Gamma})$ függvénynek az ábrázolt változókban belső optimuma van. Ez azzal magyarázható, hogy legnagyobb súllyal az ügyfelek érdekét vettük figyelembe.

Legvégül bemutatunk három példát a többszempontú biztosítási célfüggvény értékét maximalizáló b^*, λ^*, R^{Γ^*} és γ^* változók értékére, amelyeket —analitikus megoldások hiányában— szimulációs eljáráson alapuló szimplex módszerrel kerestünk meg.

Az optimalizálás során különválasztottuk a $\lambda \neq 1$ és a $\lambda = 1$ eseteket. Az utóbbinál csak olyan eseteket vizsgáltunk, amikor az osztalékfizetési korlát nagyobb, mint az adófizetési korlát, mert csakis ilyen esetekben történhet adófizetés. Emiatt az optimalizálást két részben végeztük el: megkerestük $\lambda \neq 1$ és $\lambda = 1$ esetén az optimumot, majd a kapott eredmények közül a nagyobb célfüggvény-értékhez tartozó maximumhelyet tekintettük a megoldásnak.

A bemutatásra kerülő három példában a közös paraméterek a következőek voltak: $x = 1$, $c = 2$, $\delta = 0{,}08$, $T_{\max} = 1000$, $N = 100000$. Az alkalmazott eloszláspárok várható értéke azonos volt, ám a többszempontú biztosítási célfüggvényben szereplő súlyokon változtattunk. A kapott eredményeket az *1. táblázatban* láthatjuk. A bemutatott eredmények alapján látható, hogy az optimális paraméterértékek a többszempontú biztosítási célfüggvény súlyainak változtatásával jelentősen módosulnak.

Időközök eloszlása	Kárigények eloszlása	Λ_1	Λ_2	Λ_3	λ^*	b^*	γ^*	R^{Γ^*}
Exp(0,5)	Exp(0,5)	0,35	0,35	0,3	1	8,6276	0,4168	4,9352
Exp(0,5)	Pareto(4)	0,35	0,35	0,3	1	7,5139	0,3505	1,5107
Exp(0,5)	Pareto(4)	0,05	0,05	0,9	0,8699	19,7875	0,9096	18,6219

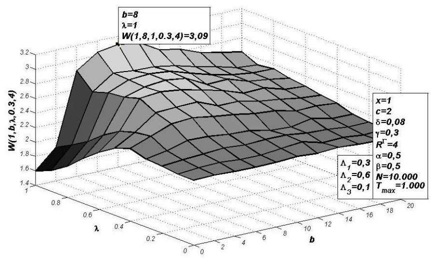
1. táblázat. Az optimális paraméterek közelítő értéke adófizetés és küszöb osztalékfizetési stratégia esetén

4 Osztalékfizetési stratégiák összehasonlítása a többszempontú biztosítási célfüggvény segítségével

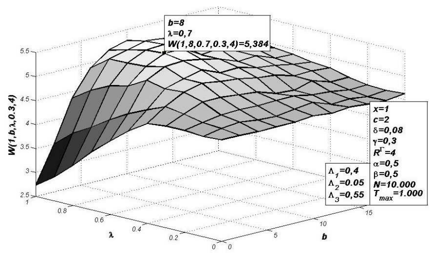
Ebben a részben a többszempontú biztosítási célfüggvény segítségével szemléletesen is megvizsgáljuk, hogy az állam adott adópolitikája mellett a konstans korlát (amikor $\lambda = 1$) vagy a küszöb osztalékfizetési stratégia az optimális $\lambda < 1$ értékkel.

A következőkben ugyanazon szimulációból származó ábrák segítségével mutatjuk be, hogy milyen hatása van a célfüggvényben szereplő súlyok megválasztásának az optimális osztalékfizetési stratégia típusára, valamint a többszempontú biztosítási célfüggvény értékére.

A szimuláció során exponenciális eloszlást használtunk $\alpha = 0{,}5$ és $\beta = 0{,}5$ paraméterrel, illetve az egyéb paraméterek a következőek voltak: $x = 1$, $c = 2$, $\delta = 0{,}08$, $\gamma = 0{,}3$, $R^\Gamma = 4$, $N = 10000$, $T_{\max} = 1000$.



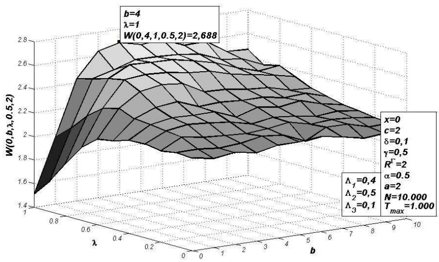
15.a ábra. A többszempontú biztosítási célfüggvény az osztalékfizetési korlát és az osztalékfizetési hányad függvényében $\Lambda_1 = 0{,}3$, $\Lambda_2 = 0{,}6$, $\Lambda_3 = 0{,}1$ súlyok alkalmazásával



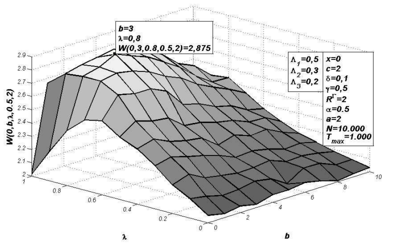
15.b ábra. A többszempontú biztosítási célfüggvény az osztalékfizetési korlát és az osztalékfizetési hányad függvényében $\Lambda_1 = 0{,}4$, $\Lambda_2 = 0{,}05$, $\Lambda_3 = 0{,}55$ súlyok alkalmazásával

A *15.a ábrán* a többszempontú biztosítási célfüggvényben szereplő súlyok $\Lambda_1 = 0{,}3$, $\Lambda_2 = 0{,}6$, $\Lambda_3 = 0{,}1$. Ekkor az optimum $\lambda = 1$-ben található, vagyis konstans korlát osztalékfizetési stratégia szerint történik az osztalékfizetés. A *15.b ábrán* a következő súlyok mellett tüntettük fel a $W(1, b, \lambda, 0{,}3, 4)$ függvény értékét: $\Lambda_1 = 0{,}4$, $\Lambda_2 = 0{,}05$, $\Lambda_3 = 0{,}55$. Mivel a Λ_i súlyok egymáshoz viszonyított értékei az előzőekhez képest változtak, eltolódott a többszempontú biztosítási célfüggvény optimuma. Ebben az esetben már nem optimális a konstans korlát stratégia, hiszen $\lambda \neq 1$, így a küszöb osztalékfizetési stratégiához jutunk $\lambda < 1$-gyel. Az ábrákon feltüntettük az optimumok közelítő értékeit is.

A kapott eredmény azért különösen érdekes, mert exponenciális eloszlású időközök és kárigények mellett a kizárólag osztalékfizetéses modell esetében a konstans korlát osztalékfizetési stratégia a megengedett stratégiák halmazán optimális (Gerber, 1969), míg az összetett modell esetén ez nem mindig igaz, mint a példa is mutatja, hiszen a többszempontú biztosítási célfüggvényt maximalizáló optimális osztalékfizetési stratégia típusa függ a súlyok megválasztásától. A megállapításunk más eloszláspárokra is igaz, például exponenciális időközök és Pareto-eloszlású kárigények esetén az alábbi ábrákon is látható ez.



16.a ábra. A többszempontú biztosítási célfüggvény az osztalékfizetési korlát és az osztalékfizetési hányad függvényében $\Lambda_1 = 0{,}4$, $\Lambda_2 = 0{,}5$, $\Lambda_3 = 0{,}1$ súlyok alkalmazásával Pareto-eloszlású kárigények esetén



16.b ábra. A többszempontú biztosítási célfüggvény az osztalékfizetési korlát és az osztalékfizetési hányad függvényében $\Lambda_1 = 0{,}5$, $\Lambda_2 = 0{,}3$, $\Lambda_3 = 0{,}2$ súlyok alkalmazásával Pareto-eloszlású kárigények esetén

5 A jövedelmezőségi index vizsgálata

A tulajdonosok érdekeinek vizsgálata során nem csak a diszkontált osztalék várható értéke lehet a vizsgálat tárgya, hanem annak a befektetett tőkéhez viszonyított aránya is. Ez esetben nem a diszkontált osztalék várható értékét maximalizáljuk, hanem a tőkeráfordításokat is figyelembe vesszük. Ezt végezhetjük a jövedelmezőségi index segítségével, amely a befektetett tőke egységére jutó diszkontált osztalék nagyságát adja meg. E mutatóban való maximalizálással meghatározhatjuk a befektetett tőke azon szintjét, amely a legnagyobb megtérülési értékkel bír.

Feltételezünk egy, a biztosítótársaság létrehozásához minimálisan szükséges pénzmennyiséget, amit a továbbiakban FC-vel jelölünk (PSZÁF, 2010), amelyen felül még a tulajdonosok további tőkét fektetnek be, ez utóbbi a kockázati folyamat x kezdőtőkéje.

Az adófizetést is figyelembe vevő összetett modellünk esetén a diszkontált osztalék várható értékét a többszempontú biztosítási célfüggvény a $\Lambda_1 = 1$, $\Lambda_2 = 0$, $\Lambda_3 = 0$ súlyok esetén adja meg. Jelöljük ezen súlyok esetén a $W(x, D, \gamma, R^\Gamma)$ értékét $W^1(x, D, \gamma, R^\Gamma)$-val. Ekkor a jövedelmezőségi index (profitability index, PI) az alábbi módon számítható (Clayman et al. 2008, p. 57.):

$$PI = \frac{W^1(x, D, \gamma, R^\Gamma)}{x + FC} .$$

Eszerint a részvényesek szempontjából kívánatos a biztosítótársaság létrehozása, ha $PI > 1$, vagyis ha az egységnyi befektetésre egységnyinél több osztalék jut.

Rögzítsük az adófizetési szintet és az adókulcsot, mivel ezeket az állam határozza meg, és vizsgálódjunk most is a küszöb osztalékfizetési stratégiák halmazán. Mivel a tulajdonosok a λ osztalékfizetési ráta, valamint a b osztalékfizetési korlát és az x kezdőtőke megválasztásába szólhatnak csupán bele, ezért vizsgáljuk a PI mennyiség függését λ-tól, b-től és x-től.

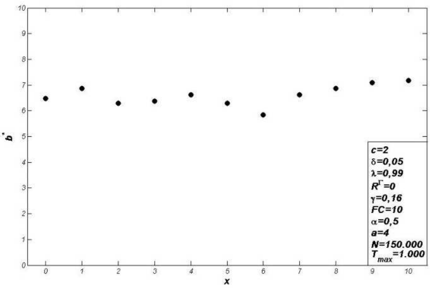
Az első megjegyzésünk az, hogy rögzített x érték mellett PI viselkedését $W^1(x, D, \gamma, R^\Gamma)$ viselkedése határozza meg. Bár az osztalékfizetési ráta növelése általában növeli a diszkontált osztalék várható értékét, $\lambda = 1$-ben a $W^1(x, D, \gamma, R^\Gamma)$ függvénynek szakadása, ugrásszerű csökkenése van, és vele együtt természetesen a jövedelmezőségi indexnek is. Ennek illusztrálására mutatjuk a *2. táblázatot*. A folyamat paraméterei az alábbiak voltak: $\gamma = 0{,}16$, $R^\Gamma = 0$, $\delta = 0{,}05$, $c = 2$, $b = 6$, $\alpha = 0{,}5$, $a = 4$, $x = 1$, $T_{\max} = 1000$, $FC = 5$, $N = 100000$.

λ	0,9	0,99	0,999	1
PI	1,4254	1,4276	1,4286	1,2847

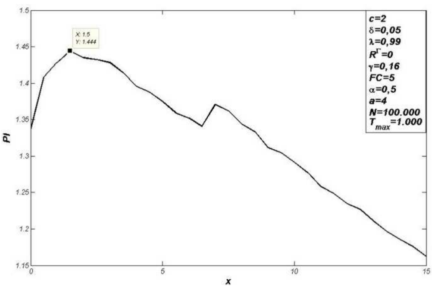
2. táblázat. A jövedelmezőségi index az osztalékfizetési hányad függvényében adófizetés és küszöb osztalékfizetési stratégia szerinti osztalékfizetés esetén

Ez az érdekes jelenség az alábbi gondolatmenettel támasztható alá: $\lambda = 1$ esetén a tartalék nagysága b fölé nem megy, viszont a b szintet elérve az adófizetési kötelezettség újra jelentkezik, ezáltal a tulajdonosoknak kifizethető pénzösszeg kevesebb, mint ha adófizetési kötelezettség nem lenne. Ha viszont $\lambda < 1$, de közel van 1-hez, akkor a tartalék b fölé tud kerülni, s ha valaha b fölé került, akkor mivel az osztalékfizetési hányad közel 1, ezért amint a tartalék a b értéket eléri, csaknem az összes díjbefizetés az osztalék értékét gyarapítja, adót viszont a korábbi maximális tartalék eléréséig nem kell fizetni.

Adófizetés nélküli modellt vizsgálva Gerber és Shiu bebizonyították, hogy a küszöb osztalékfizetési stratégia esetén exponenciális eloszlású kárigények és Poisson kárfolyamat esetén az optimális b osztalékfizetési korlát értéke nem függ a kezdőtőke értékétől (Gerber & Shiu, 2006). Ezen speciális esetben a szerzők analitikusan meg tudták adni a diszkontált osztalék várható értékét, és azt tapasztalták, hogy a megadott formula nem függ a kezdőtőkétől. Mivel esetünkben (adó- és osztalékfizetés mellett) analitikus formula nem áll rendelkezésre a diszkontált osztalék várható értékére, ezért szimulációs vizsgálatokat végeztünk arra vonatkozólag, hogy az optimális osztalékfizetési korlát hogyan függ a kezdőtőkétől. Azt tapasztaltuk, amennyiben az osztalékfizetési rátát rögzítjük, akkor az optimális osztalékfizetési korlát (b^*) a szimuláció pontatlanságából származó hibától eltekintve állandó. Ennek illusztrálására mutatjuk be a *17. ábrát.* A kárfolyamat Poisson-folyamat volt $\alpha = 0{,}5$ paraméterrel, a kárigények eloszlását Pareto-eloszlásnak választottuk $a = 4$ paraméterrel, az adófizetési ráta $\gamma = 0{,}16$, az adófizetési szint $R^\Gamma = 0$, $\lambda = 0{,}99$, $\delta = 0{,}05$, $c = 2$, $FC = 5$, $T_{\max} = 1000$, a szimulációk száma $N = 150000$.



17. ábra. Az optimális osztalékfizetési korlát a kezdőtőke függvényében



18. ábra. A jövedelmezőségi index a kezdőtőke függvényében

Figyelembe véve a jövedelmezőségi index megadására vonatkozó formulát, ugyanez mondható el a jövedelmezőségi indexről is rögzített osztalékfizetési ráta mellett, azaz az optimális osztalékfizetési korlát értéke nem függ a kezdőtőkétől. Vagyis az osztalékfizetési ráta rögzítése után a két változóban történő optimalizálás két lépcsőben is elvégezhető: rögzített kezdőtőke (pl. $x = 0$) esetén megkeressük az optimális b^* korlátot, majd ezen b^* rögzítése mellett egy változóban (x-ben) maximalizáljuk PI értékét. A jövedelmezőségi indexet x függvényében a $b = 6{,}5$ (ami a fenti b^* értékek átlaga) választás és az egyéb paraméterek változatlanul hagyása mellett a *18. ábra* mutatja.

Az előző paraméterértékek esetén $b = 6{,}5$ választással az optimális x értéke közelítőleg $x^* = 1{,}5$-nak adódott, a maximális jövedelmezőségi index értéke pedig $PI = 1{,}444$.

A λ, x, b változókban háromváltozós optimalizálás eredménye a szimplex módszer alkalmazásával $N = 100000$ szimuláció esetén a következő lett: az optimális paraméterértékek $\lambda^* = 0{,}98$; $b^* = 6{,}4$; $x^* = 1{,}68$-nak adódtak, és az optimum értéke $PI = 1{,}438$. A csekély eltérést a szimuláció hibája indokolja.

6 Összefoglalás

Dolgozatunk témája a biztosítótársaság tartalékképzési folyamatának vizsgálata volt adó- és osztalékfizetés mellett. Kiindulópontunk egy olyan alapmodell volt, amely szerint a biztosítóhoz véletlentől függő időpontokban szintén véletlentől függő kárigények érkeznek be, amelyek kifizetését az időben állandó intenzitással beérkező bevételekből fedez. Bemutattuk, hogy az alapmodell —a szakirodalom alapján— miként bővíthető adó- vagy osztalékfizetéssel. Ezt követően összevontuk az adó- és az osztalékfizetést egyetlen modellbe. Ezáltal egy, a valósághoz közelebb álló modellhez jutottunk, amelyet a szakirodalomban eddig még nem vizsgáltak. E modell esetén bevezettünk egy új célfüggvényt, amely mind az állam, mind az ügyfelek, mind a biztosítótársaság tulajdonosainak érdekeit figyelembe veszi. Ez a célfüggvény így a biztosítótársaság működése révén létrejövő, több szereplő érdekét figyelembe vevő függvény, emiatt többszempontú biztosítási célfüggvénynek neveztük.

Az összetett modell esetében —mivel nem ismerünk analitikus megoldást— az optimum meghatározására számítógépes szimuláción alapuló numerikus eljárásokat használó programokat dolgoztunk ki, amelyek rendelkeznek a szimuláció azon előnyével, hogy bármely eloszlás esetén alkalmazhatóak.

Összehasonlítottuk adott adópolitika mellett a konstans korlát és a küszöb osztalékfizetési stratégiát az újonnan definiált célfüggvény segítségével. Arra a következtetésre jutottunk, hogy a többszempontú biztosítási célfüggvény értékét maximalizáló osztalékfizetési stratégia függ az alkalmazott súlyoktól, így nincs általánosan jó választás az optimális stratégiát illetően.

Végezetül megvizsgáltuk a tulajdonosok számára érdekes jövedelmezőségi indexet a tulajdonosok által változtatható paraméterek függvényében és szimuláción alapuló eljárást adtunk a jövedelmezőségi index optimalizálására. Megállapítottuk, hogy a diszkontált osztaléknak és vele együtt a jövedelmezőségi indexnek $\lambda = 1$-ben ugrásszerű csökkenése van.

Összefoglalásképp elmondható, hogy az új modellel és az új célfüggvénnyel a valósághoz közelebb álló, több szempontot figyelembe vevő, megbízható vizsgálati eszközhöz jutottunk, amit a kapott eredmények egyértelműen igazoltak, így akár egy leendő szakértői rendszer alapjait is képezhetik az általunk kidolgozott programok, elemzési szempontok.

A modell tovább is bővíthető lenne, például a tartalék befektetésével, viszontbiztosítások figyelembe vételével vagy fenyegető csőd esetén tőkebefektetés vagy áthidaló kölcsön alkalmazásával, esetleg bevezethető többkulcsos adórendszer is. Mivel ezeket a tényezőket mi nem építettük be a modellünkbe, ezért a levont következtetések a gyakorlati életben (pl. életbiztosítások esetén) csak korlátozottan alkalmazhatóak.

Irodalom

1. Albrecher, H., Hartinger, J., Tichy, R. (2005). On the Distribution of Dividend Payments and the Discounted Penalty Function in a Risk Model with Linear Dividend Barrier. *Scandinavian Actuarial Journal*, 103–126.

2. Albrecher, H., Hipp, C. (2007). Lundberg's risk process with tax. *Blätter der DGVFM*, 28(1): 13–28.

3. Albrecher, H., Kainhofer, R. (2002). Risk Theory with a Nonlinear Dividend Barrier. *Computing*, 68(4): 289–311.

4. Albrecher, H., Thonhauser, S. (2007). Dividend maximization under consideration of the time value of ruin. *Insurance: Mathematics and Economics*, 41: 163–184.

5. Asmussen, S., Taksar, M. (1997). Controlled Diffusion Models for Optimal Dividend Pay-Out. *Insurance: Mathematics and Economics*, 20: 1–15.

6. Avanzi, B. (2007). Strategies for Dividend Distribution: A Review. *North American Actuarial Journal*, 13 (2) 217-251.

7. Clayman, M. R., Fridson, M. S., Troughton, G. H. (2008). *Corporate Finance: A Practical Approach.* John Wiley & Sons Inc., New Jersey.

8. Gerber, H. U. (1969). Entscheidungskriterien für den Zusammengesetzten Poisson-Prozess. *Bulletin de l'Association Suisse des Actuaires*, 2: 185–228.

9. Gerber H. U., Shiu, E. S. W. (2006). On Optimal Dividend Strategies in the Compound Poisson Model. *North American Actuarial Journal*, 10(2): 76–93.

10. Gerber, H. U., Shiu, E. S. W. (1998). On the time value of ruin. *North American Actuarial Journal*, 2(1): 48–78.

11. Lin, S., Willmot, G.E., Drekic, S. (2003). The classical risk model with a constant divident barrier: analysis of the Gerber-Shiu discounted penalty function. *Insurance: Mathematics and Economics*, 33 (3) 551-556.

12. Lundberg, F. (1909). *Über die Theorie der Rückversicherung.* Transactions of the VIth International Congress of Actuaries 1: 877–948.

13. Ming, Z., Junyi, G. (2008). Classical risk model with threshold dividend strategy. *Acta Mathematica Scientia*, 28(2): 355–362.

14. Sparre Andersen, E. (1957). On the Collective Theory of Risk in a Case of Contagion between Claims. *Bulletin of the Institute of Mathematics and Its Applications*, 12: 275–79.

15. PSZÁF (2010). *Biztosító részvénytársaság alapítása.* http://www.pszaf.hu/data/cms548124/Biztos_t___alap__t__s__nak_enged__lyez__se.pdf (2011. október).

INVESTIGATION OF THE SURPLUS PROCESS OF AN INSURANCE COMPANY WITH TAX AND DIVIDEND PAYMENT

The paper deals with modelling of the surplus process of insurance companies. The basic model contains only two elements: the income of the company paid by insured and the outcome paid to the insured on the basis of the claims. Claims occur at random time points and their amounts are random, as well, hence surplus processes are stochastic processes. This basic model has been generalized by taking into account further factors, for example tax or dividend payment. In our paper we present a generalized model which has been developed by us and handles together both tax payment and dividend payment. We introduce a new target function, which respects the interest of the government, the insurance company and the insured people, as well. We analyze this model applying threshold strategy concerning dividend payment. We calculate the values of the investigated functions by Monte-Carlo simulation and we maximize the target function numerically. We also investigated the profitability index and a method is given to find its maximum in the function of the initial surplus and the level of dividend payment.

KÖNYVEKRŐL

ZALAI ERNŐ: *Matematikai közgazdaságtan I-II.* Akadémiai Kiadó, Bp. 640+742 o.

Örömteli érdeklődéssel vehettük kézbe tavaly a szerző *Matematikai közgazdaságtan I. – Általános egyensúlyi modellek és mikroökmonómiai elemzések* című könyvét, idén pedig a *Matematikai közgazdaságtan II. – Többszektoros modellek és makrogazdasági elemzések* címen megjelent folytatást. Örömünk oka egyebek mellett az volt, hogy ritkán jelenik meg magyar nyelven olyan munka, mely a tárgyalásnak mind mélységében, mind pedig szélességében messze túlmegy a középfokú tankönyveken. Érdeklődésünket pedig – egyebek mellett – a 11 évvel korábbi, első kiadás táplálta, melyet a szerző átdolgozott és kibővített. I. kötetben tett ígéretét betartva a szerző most jelentkezett a folytatással, ami már csak azért is örvendetes, mert az első kiadás olvasása során hamar kiderült, hogy a tartalom bizony szétfeszíti az egyetlen kötet által nyújtott terjedelmi korlátokat. Ráadásul a II. kötetben tárgyalt témák (lényegében a korábbi könyv III. része) jelentősen kibővültek, és teljesen új szerkezetben, a korábbinál didaktikusabb kifejtésben kerülnek bemutatásra.

Az első kötet, mint alcíme is jelzi, az általános egyensúlyelmélettel és annak mikroökonómiai vonatkozásaival foglalkozik, az axiomatikus elméleti alapoktól kezdve az egyensúly egzisztenciájának bizonyításán át a mikroökonómiai sajátosságokig. Az itt közölt eredmények alapjául a termelői és fogyasztói döntések nyomán kialakuló kínálati és keresleti leképezések szolgálnak. A második követi az elsőben megszokott, alapvetően sokváltozós tárgyalásmódot, de már elsősorban olyan modelleket ismertet, melyek részletesebben ábrázolják a gazdaságot és főbb részeinek összefüggéseit. A fókusz itt a gazdasági rendszer, strukturális sajátosságaira,a javak termelésére, elosztására és felhasználására, továbbá az ezeket szabályozó egyensúlyi árrendszer kérdéseire kerül. Bár a problémakört a kötet az elsőhöz hasonlóan továbbra is mikroökonómiai alapokon közelíti meg, tematikájában mégis a makroökonómia a meghatározó.

Az első kötet első része meglehetősen elvont szinten, az általános egyensúlyelmélet matematikai közgazdaságtani alapjait képező termelés- és fogyasztáselméletet tartalmazza és az egyensúly létezésének Arrow–Debreu–McKenzie-féle általános modellkeretben történő bizonyítását. A tárgyalás jellemző eszköztárát ez utóbbi esetben a halmazelmélet, a leképezések és a konvex analízis szolgáltatja. Ám ugyanebben a kötetben sor kerül ezen elemzések konkretizálására és kibővítésére a függvénytani apparátus és a lokális analízis eszköztára alapján, a modern mikroökonómiai elemzések szellemében, a szokásosnál teljesebb matematikai vértezetben. Az esetleges matematikai, elsősorban többváltozós analízisbeli hiányok pótlását a kötet függeléke szolgálja.

A második kötet egyrészt azokra a számszerűsíthető, többszektoros modellekre összpontosítja a figyelmet, melyeket napjainkban a gazdaságpolitikai elemzések során rendszeresen igénybe vesznek. Olyan elemzések során, melyek célja nem prognóziskészítés, hanem gazdaságpolitikai intézkedések várható hatásainak felmérése: konkrét számadatokon alapuló komparatív statika, illetve dinamika. Az ismertetett modellek konzisztens elméleti megalapozottsága komoly kihívás a statisztikai-ökonometriai előrejelző modellek számára. Ez a kötet tartalmazza másrészt a többszektoros modellek klasszikusnak mondható újratermelés- és árelméleti alkalmazásait is, amelyek az utóbbi időben sajnálatosan és érdemtelenül háttérbe szorultak a volt szocialista országokban, így nálunk is.

A második kötet az első ismerete nélkül is tanulmányozható, mert részletesen ismerteti a vizsgált modellek elméleti és módszertani alapjait. Az említett gyakorlati alkalmazhatóság szükségessé teszi, hogy röviden kitérjen a modellek számszerűsítéséhez szükséges statisztikai adatok beszerzésének, a megoldási algoritmusok és számítástechnikai eszközök kérdéseire is. A szerző sehol nem marad adós az elméleti és elmélettörténeti vonatkozások ismertetésével, ami a tárgyalás folyamatát helyenként megtörni látszik, de a figyelmes olvasó előbb-utóbb észreveszi, hogy az egyes modellek elmélettörténeti hátterének megvilágítása nem öncélú, hanem azok könnyebb megértését szolgálja.

A két kötet felépítése

A matematikai közgazdaságtan és az általános egyensúlyelmélet kialakulásának történetét bemutató első fejezet voltaképpen a két kötetet fűzi egybe. Ezt követően kezdődik az I. kötet önálló első része. Itt kerülnek ismertetésre a termelési és fogyasztási modellek olyan általános fogalmai és jellemzői, egyelőre meglehetősen absztrakt kifejtésben, mint a technológiai halmazok, a preferenciarendezés, továbbá az optimális termelői és fogyasztói döntési leképezések. Ezeken alapulnak a versenyzői egyensúly létezésének és hatékonyságának fontos alaptételei, köztük a Walras-törvény, Brouwer és Kakutani fixponttétele, a Pareto-hatékonyság, és a szeparációs tételek. Mindezek után következik az általános versenyzői egyensúly létezésének részletes bizonyítása a konvex analízis eszköztárának felhasználásával.

A második rész a termelési, hasznossági és egyéb aggregáló függvények részletes elemzésével kezdődik. Ezt követi a nyereségmaximum, majd a költség- és kiadásminimum kérdésének vizsgálata különféle korlátozó feltételek mellett. A könyv egyik sajátos jellemzője, hogy a szerző, ahol csak lehetséges, együtt tárgyalja a termelői és fogyasztói kereslet alakulását. Ezek a részek már csak azért is különösen érdekesek, mert a témában megjelent legtöbb publikációval szemben nem szűkítik le a tárgyalást a homogén, vagy homotetikus termelési függvényekre és a szükségességi feltételekre. A Marshall- és Hicks-féle (kompenzált) keresleti függvények levezetése után kerül sor a komparatív statika általános módszertanának, az optimális döntésekből fakadó dualitás jelenségének ismertetésére, majd ennek kapcsán a rekonstruálhatóság és integrálhatóság összetett kérdéseire. A szerző teljes matematikai részletességgel mutatja be a keresleti- és költségfüggvények mikroökonómiai elemzését, illetve a gyakorlati alkalmazásokban leginkább használt, számszerűsítésre alkalmas keresleti rendszerek jellemzőit. A második részt az egyensúly és a hatékonyság függvénytani eszközökkel történő elemzése zárja. Ez a fejezet elvezet a számszerűsített általános egyensúlyelméleti modellek egy stilizált változatához, amely részletesebben és más oldalról megközelítve a II. kötet egyik fő témája lesz.

A négy részből álló II. kötet *első része* a többszektoros modellek legfontosabb elméleti, elmélettörténeti és módszertani alapjaival foglalkozik. Röviden felvázolja a makrogazdasági modellek mögött meghúzódó általános egyensúlyelméleti szemlélet főbb vonásait, áttekinti a többszektoros modellek fejlődésének történetét, majd első megközelítésben bemutatja az általános egyensúlyelmélet azon modelljeit, melyek jelentős mértékben hatottak a ma használatos konstrukciók felépítésére, elméleti és módszertani szemléletére.

Ennek a résznek az olvasása során más fajta nehézség merülhet fel, mint az I. kötetben. Nem lesz könnyű eligazodni a meglehetősen nagyszámú fogalom és modell között. Ezek többségére azonban a könyv a későbbiekben visszatér, pontosítva az itt bevezetett fogalmakat, részletesebben elemezve a modelleket, vagy azok egyes lényeges építőelemeit. Egyúttal a főbb jelölések összefoglaló táblázatával, a fejezetek elé írt bevezetésekkel és egyes részek összefoglalásával is igyekszik a szerző segíteni az olvasó munkáját.

A kötet első részében kerül ismertetésre Walras és Cassel modellje és azok nevezetes Schlesinger–Wald-féle változata. A következő fejezetben ezeket a tisztán elméleti célokat szolgáló modelleket a szerző összeveti Leontief gyakorlati elemzések számára kidolgozott, ma már klasszikusnak számító, input-output technológián alapuló általános egyensúlyi modelljével. Ezután, visszatérve a stilizált elméleti modellekhez, ismerteti az általános egyensúly Hicks és Samuleson nevével fémjelezhető, mikroökonómiai indíttatású, neoklasszikus modelljének egy általános, absztrakt és egy egyszerűbb változatát. Mai szemmel nézve ennek az egyszerűbb és konkrétabb változata érdekes különösebben, amelynek felépítése közelebb áll a gazdaságpolitikai elemzések során napjainkban kiterjedten alkalmazott számszerűsített általános egyensúlyelméleti (CGE) modellekhez.

A neoklasszikus megközelítésre jellemző függvénytani elemzés bemutatása után a tárgyalás visszatér a korai megközelítésekre jellemző módszertanhoz: a gazdaság rögzített kibocsátási és ráfordítási, illetve felhasználási együtthatók révén történő ábrázolásához. Az input-output modellen nyugvó, roppant leegyszerűsített ábrázolással szemben a Neumann és Koopmans nevéhez fűződő lineáris tevékenységelemzési modell (LTM) már egyenrangú alternatívája, sőt sok tekintetben megfelelőbb eszköze a gazdaság leírásának, mint a termelési és hasznossági függvények. Részletes kifejtésre kerül az LTM alapját képező axiomatikus termeléselmélet, amely nem előfeltételezi, hanem értelmezi és elemzi a termelési tevékenységek hatékonyságát, és annak kapcsolatát a gazdaságossággal, az egyensúllyal és az egyensúlyi és hatékonysági árakkal.

A kötet *második része* a Leontief-féle input-output modellek és makrogazdasági elemzések módszertanával és gyakorlati alkalmazásaival foglalkozik. A viszonylag kis terjedelem ellenére a szerző igyekszik minél teljesebb körűen bemutatni az „input-output gazdaságtant”, a produktivitás, hatékonyság és jövedelmezőség matematikai alapjait, elsősorban a Perron–Frobenius-féle sajátértéktételeket, az input-output elemzések gyakorlati alkalmazásait, az ezekhez szükséges statisztikai adatforrásokat, az ÁKM és SAM eltérő tartalmú változatait, az egyszerűbb multiplikátorokkal és a valamivel összetettebb input-output modellekkel végezhető elemzéseket. Itt esetleg a modellváltozatok bősége okozhat kezdeti nehézséget a témát kevéssé ismerő olvasó számára.

A *harmadik rész* témája az erőforrás-allokáció és áralakulás elemzése programozási és általános egyensúlyi modellekkel. Ennek során kiterjeszti az input-output modellekkel végzett elemzéseket: a korlátozott mennyiségben rendelkezésre álló erőforrások figyelembe vételével illusztrálja a lineáris tevékenységelemzési modell és a lineáris programozás felhasználásával végezhető elméleti és gyakorlati makrogazdasági elemzéseket, rámutatva a lineáris megközelítés egyes gyengeségeire és arra, hogyan lehet a jelentkező problémákat alkalmasan megválasztott nemlineáris formák segítségével elfogadhatóbb módon kezelni. Bemutatja, és több oldalról elemzi az input-output modellek, az optimális erőforrás-allokáció lineáris és nemlineáris programozáson alapuló modelljei és az általános egyensúlyi modellek közös és elhatároló jegyeit. Ebből az összehasonlításból tűnik ki, hogy a számszerűsített általános egyensúlyelméleti modellek lényegében szintetizálják az alternatív megközelítések lényeges elemeit. Érdemes felfigyelni rá, hogy az első kötettel szemben, itt a főbb makrogazdasági elszámolási azonosságokra összpontosító, holisztikus modellek fokozatos kibontása során jut el a szerző a számszerűsített általános egyensúlyelméleti modellekhez.

Az előző két résszel szemben a *negyedik rész* már nem a modellek gyakorlati alkalmazásával összefüggő kérdésekkel foglalkozik, hanem a többszektoros statikus és stacionárius egyensúlyi modellekkel végzett elméleti elemzések gazdag irodalmába nyújt betekintést, bemutatva a szerző e témában elért saját eredményeit is. Részletesen tárgyalja Neumann nevezetes stacionárius növekedési modelljét, annak közgazdasági és matematikai hátterét, és összeveti a Leontief-féle, input-output megközelítésen nyugvó, zárt stacionárius egyensúlyi modellel. Ennek során általánosítja egyrészt a Neumann-modellt, másrészt megfogalmazza a konstans együtthatós modellek egy általános keretmodelljét. Modern átfogalmazásban bemutatja az újratermelés és az árak makrogazdasági egyensúlyának a klasszikusok (Smith, Ricardo, Marx) elméletén nyugvó és az újabb, Leontief-, Sraffa- és Neumann-típusú modelljeit, lehetővé téve többek között a reálbér és profitráta, illetve a fogyasztás és felhalmozás közötti átváltási (határgörbék), a technikák közötti átváltási és visszaváltási lehetőségek elemzését. Komoly elmélyülést igényel ebben a részben a reducibilis gazdaságok sajátosságait elemző részek megértése.

Néhány megjegyzés a két kötet aktualitásával kapcsolatban

Mivel jelen sorok írójának lehetősége volt a II. kötet alapjául szolgáló kézirat elolvasására, helyénvalónak tűnik a két kötet aktualitásával kapcsolatos első benyomások ismertetése. Ennek során gyakrabban hivatkozom a II. kötetre, de jó lesz már most tisztázni, hogy annak feldolgozását jelentős mértékben megkönnyíti az I. kötet ismeretanyaga.

Mindenekelőtt arra kell felhívni a figyelmet, hogy a szerző mindkét kötetben szakít az elmélet és gyakorlat egymás ellen történő kijátszásának utóbbi évek során hazánkban sajnálatos módon kialakult hagyományával. E jelenség gyökerei minden bizonnyal a ,,véleményformáló" közgazdászok nagyobb részének elégtelen felkészültségében rejlenek, ami az egyik, a gyakorlati alkalmazások oldaláról irreleváns elméletek és modellek kidolgozásának vádját eredményezi, a másik oldalon pedig a mélyebb elméleti megalapozást nélkülöző, kalandor-jellegű gyakorlati alkalmazások gyanúját ébreszti. Zalai Ernő könyve meggyőzően mutatja be, milyen messzire lehet jutni, ha valaki az elméletet és gyakorlatot nem egymás ellen, hanem egymás alátámasztása érdekében használja.

Ugyanakkor elsősorban a II. kötet szomorú aktualitását adja Bródy András két évvel ezelőtt bekövetkezett halála. Bródy életműve és a kapcsolódó munkák hazánk szélesebb szakmai közönsége számára kevéssé ismeretek. Ennek egyik oka, hogy a politikum által determinált akkori szakma a ,,kaszton és társadalmon kívüli tudóst" (Zalai (2011)) mellőzni igyekezett: nem lett belőle a Magyar Tudományos Akadémia tagja, és nem kapott egyetemi tanszéket sem. A másik ok, hogy a Bródy munkásságának feldolgozásához szükséges előismeretekkel a többség ma nem is rendelkezik. Ezen segíthet Zalai Ernő könyve, közelebb hozva Bródy munkásságát a szélesebb szakmai közönséghez, ilyen módon tisztelegve a 20. század egyik legkiválóbb magyar közgazdászának emléke előtt.

Van azonban a második kötetnek más fajta aktualitása is: Az utóbbi években, elsősorban az EU nyomására, megnőtt az igény a gazdaságpolitikai intézkedések bevezetését megelőző hatástanulmányok iránt, de elmaradt az ezek elkészítésére alkalmas modellek mibenlétének pontos tisztázása. Egyebek mellett ezt a régóta szükséges tisztázást is elősegíti a második kötet. Biztosra vehető, hogy amennyiben a gazdaságpolitika művelői és az annak kritikai elemzését végző szakértők munkájuk során a könyv által rendelkezésre bocsátott tudásbázist használják, melyet a szerző és munkatársai paradox módon eddig csak külföldön tudtak kamatoztatni, ez a makrogazdasági problémákról történő közgondolkodás hazai színvonalának emelkedését fogja magával hozni, aminek szükségességét indokolni fölösleges.

Érdemes továbbá fölvetni a többváltozós, illetve többszektoros megközelítés aktualitásának kérdését. Ezt már csak azért is meg kell tenni, mert úgy tűnik, mintha a főáramú makroökonómia más utat követne. Az utóbbi évtizedekben ugyanis széles körben elterjedtek a magasan aggregált, dinamikus, sztochasztikus általános egyensúlyelméleti (DSGE) modelleken nyugvó, makroökonómiai jellegű elemzések. Bár ezekben is előfordul több szektor, de a köztük fennálló gazdasági kapcsolatok többnyire Romer (1990) nevezetes endogén növekedési modelljének mintájára a modellföltevések által eleve meghatározottak. Így ezek a modellek nem képesek figyelembe venni a termékek termelőfelhasználásán keresztül létrejövő multiplikátor hatásokat, nem alkalmasak ágazati szintű elemzésekre, a téves beruházási döntések megragadására. A többszektoros modellek kiküszöbölik a fenti hátrányokat hasznosan kiegészítve a magas szinten aggregált makromodelleket.

Végül szólni kell a könyv oktatás területén történő felhasználásának lehetőségeiről. Mindkét kötetnek elsősorban a PhD képzések, vagy az igényesebb közgazdaságtani mesterképzések vehetik jó hasznát. Az I. kötet haladó szintű mikroökonómia kurzusok alapját képezheti, de jól hasznosítható egy bevezető matematikai közgazdaságtani kurzus során is. A II. kötet egy gyakorlati alkalmazásokra koncentráló, többszektoros makromodellezési, vagy más hangsúlyokkal, egy haladó szintű termelés- és árelméleti kurzus számára nyújthat komoly segítséget. A közgazdászképzésen kívül jól hasznosíthatóak a könyv egyes részei a matematikus doktori képzésben is.

Mindezek alapján jó szívvel ajánlom e két kötetet, elsősorban azoknak, akik az elmúlt évtized gyakran fölösleges vitái után eljutottak arra a felismerésre, hogy sem a közgazdasági elmélet, sem pedig annak gyakorlati alkalmazása nem nélkülözheti a fejlett matematikai apparátus használatát, és a mikro-, illetve makrogazdasági elemzések elméleti és gyakorlati kérdéseivel haladó szinten kívánnak foglalkozni. Meggyőződésem, hogy mindkét kötetet sokat és sokáig fogjuk hasznos kézikönyvként forgatni.

Bessenyei István

Irodalom

1. Romer, Paul, M., Endogenous Technological Change, The Journal of Political Economy, Vol. 98, No. 5. (Oct., 1990), pp. S71-S102.
2. Zalai Ernő. Bródy András, a kaszton- és társadalmon kívüli tudós, SZIGMA, XLI. 1-2. (2010) 1-11.

CONTENTS

TARTALOM

KÖNYVEKRŐL

SZIGMA
Matematikai-közgazdasági folyóirat

A Gazdaságmodellezési Társaság lapja

Terjeszti a Gazdaságmodellezési Társaság. A kiadvány megjelenését az MTA Könyv- és Folyóiratkiadó Bizottsága támogatta.

ISSN 0039-8128

www.szigma.ktk.pte.hu